大學叢書

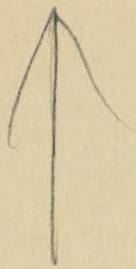
積分方程式之導引

波瑟耳著
胡敦復 范會國 顧澄譯

STORAGE ITEM
ASIAN

LPA - C64F
UBC LIBRARY

商務印書館發行



大 學 叢 書

積分方程式之導引

大學叢書委員會

委　　員

丁燮林君　王世杰君　王雲五君
任鴻雋君　朱經農君　朱家驊君
李四光君　李建勛君　李書華君
李書田君　李聖五君　李權時君
余青松君　何炳松君　辛樹幟君
吳澤霖君　吳經熊君　周　仁君
周昌壽君　秉　志君　竺可楨君
胡　適君　胡庶華君　姜立夫君
翁之龍君　翁文灝君　馬君武君
馬寅初君　孫貴定君　徐誦明君
唐　鉞君　郭任遠君　陶孟和君
陳裕光君　曹惠羣君　張伯苓君
梅貽琦君　程天放君　程演生君
馮友蘭君　傅斯年君　傅運森君
鄒　魯君　鄭貞文君　鄭振鐸君
劉秉麟君　劉湛恩君　黎照寰君
蔡元培君　蔣夢麟君　歐元懷君
顏任光君　顏福慶君　羅家倫君
顧頡剛君

大 學 叢 書

積分方程式之導引

波瑟耳著
胡敦復 范會國 顧 澄譯

交通大學叢書之一

商務印書館發行

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of British Columbia Library

http://www.archive.org/details/jifenfangchengsh00ubc

目 錄

引論……………………………………………………………1

1. 預備定義及預備定理……………………………………3

2 Abel 氏力學上之問題……………………………………10

3. Abel 氏方程式之解………………………………………12

4. Liouville 氏之引出第二種積分方程式…………………18

5. 逐次代入法…………………………………………………22

6. 第二種積分方程式之 Volterra 氏解法,層疊函數及逆函數……………………………………………30

7. 無限個變數之線代數方程式……………………………38

8. Fredholm 氏解法……………………………………………45

9. 有一參數之積分方程式……………………………………59

10. 齊次積分方程式之基本定理及其應用…………………68

11. 對稱核……………………………………………………73

12. 互垂函數…………………………………………………81

13. 第一種積分方程式其核爲有限者………………………92

14. 第一種方程式其核或節爲非有限者……………………100

附錄 譯名及原名對照表……………………………100--111

積分方程式之導引

引　論

積分方程式 (integral equation), 常謂之定積分 (definite integral) 之迴求, 其理論及應用至近數年中始爲數學家所注意; 且進而爲其研究之中心. 所謂積分方程式* 者, 卽方程式之含有一個或若干個積分記號 (sign of definite integral), 而此類積分號下又含有未知函數者也. 積分方程式之爲數學家所注意者, 至現在爲止, 大抵爲兩種簡單形式, 卽第一第二兩種線方程式 (the linear equations of the first and second kinds). 而本書所論亦不外乎此. 以下所論之積分方程式, 以只有單積分 (simple integral) 者爲限. 此種本屬無須, 不過於討論之初, 藉避無謂之複雜而已; 至其所得之結果, 常易推至有多重積分 (multiple integral) 之方程式.† 而毫不發生困難之點; 蓋就此種推廣之難易而論, 正與微分方程式 (differential equation) 相反也 (微分方程式, 由常微分方程式

---

* 積分方程式之名稱乃 Bois-Reymond 所首示, 可參考 Crelle vol. 103. (1888), p. 228.

† 其又一推廣, 爲一組聯立積分方程式之討論, 此種推廣, 亦無甚困難. 但此種聯立積分方程式, 本書略而不論.

推至偏微分方程式 (partial differential equation) 須經極難之研究).

回溯積分方程式之起源,至少自 Fourier 氏所創之積分定理始: Fourier 氏於此雖不以討論積分方程為目的,但此定理實可視作為「求得一第一種積分方程式之解」之陳述.* 但以後 Abel 氏, Liouville 氏, 及其後起者之討論特種積分方程式, 皆起於自覺, 非繼 Fourier 氏為之耳. 此類數學家中頗多已知積分方程式論之應至何種重要之地位.†

本書於積分方程式之應用, 雖除一比較上不甚重要之問題外, 未加討論; 但可以明言者, 此亦如他枝解析, (other branches of analysis) 其理論常生於力學及數理物理中之特種問題〔大抵因此種問題發生時,非已有之數學所能解決,遂創一種新數學解決之; 於是此新數學之理論, 逐漸發達, 自成一枝. 而有存在之價値矣〕. 此不但以前 Abel, 及 Liouville 兩氏時為然, 即近今 Volterra 及 Fredholm 兩氏時, 亦是如此〔即此四氏之討論積分方程式, 皆源於力學及數理物理中之問題也〕. 從「積分方程式論」之此種應用及其與他枝解析之關係,‡ 即可知此學之極為重要矣.

* 參觀本書末兩頁.

† 於上書之 Bois-Reymond 氏著作之外, 可再參觀 Rouché 氏之評論 Paris C.R. vol. 51(1860). p. 126.

‡ 例如 Hilbert 氏之著作中, 有許多此種關係.

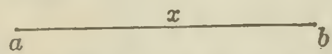
1. 預備定義及預備定理

為便利以後各款之說明起見,先述若干定義,及摘錄積分中之若干定理,以備後用.

以後所討論者為一變數 (variable) 及兩變數之函數, (function of two variables) 其自變數 (independent variable) 皆為實數 (real number). 而以 x 及 (x, y) 表之.并為避免無須之辭費,凡以後所謂之數,皆指實數而言;其不實者,當臨時說明之.

凡一自變數 x 所經之一組值以

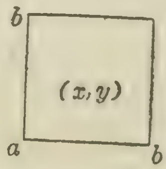
$I \qquad a \leqq x \leqq b$



表之;即 x 自 a 起至 b 止,經過 a, b 中之一切值是也.此由 a 至 b 之一切值謂之 (a, b) 節 (interval), 以後常以 I 表之,而逕名之曰 I, 或 I 節.

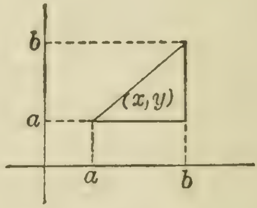
凡兩自變數之函數,其兩自變數 (x, y), 作為直交坐標; (rectangular coordinate) 分兩種情形討論之:其一為 (x, y) 經過一平方中之一切值,此平方以

$$S \qquad \begin{Bmatrix} a \leqq x \leqq b \\ a \leqq y \leqq b \end{Bmatrix}$$



表之,以後逕名之曰 S, 或 S 平方 (square). 其二爲 (x, y) 經過一三角形中之一切值, 此三角形以

$$T \qquad a \leqq y \leqq x \leqq b.$$



表之,以後逕名之曰 T, 或 T 三角形. 此宜注意者,上所定之 I, S, T 三區域, 皆爲閉區域 (closed region), 卽區域之邊界皆包括於區域之中.

欲避免以後說明上之煩複起見, 先作下之定義:

定義 設 (x, y) 之函數之不連續點 (discontinuity) 在有限條曲線上, 而此類曲線又各具兩種性質: (1) 有連續轉向之切線 (continuously turning tangent), (2) 與「平行 x 軸或 y 軸之直線」之交點,只有有限個,則謂之此 (x, y) 之函數之不連續點在 S 或 T 中規則分佈 (regularly distributed).

又爲說明簡便起見,再假定以後所論之函數在其不連續點上有定義(卽在不連續上亦有已定之值), 至少亦在不連續點之近鄰中爲有限 (finite)

下定理極爲重要,爲以後各款中所常用;今先就其在 S 區域中者言之:

定理 1. 若兩函數 $\phi(x, y)$ 及 $\psi(x, y)$ 在 S 中有限, 及如有不

連續點時其不連續點爲規則分佈;則

$$F(x,y)=\int_a^b \phi(x,\xi)\psi(\xi,y)d\xi$$

在 S 中連續.

若 (x,y,ξ) 作爲空間中直交坐標,此定理卽易明白.因如是則此積分號下之函數在立方

$$a\leqq x\leqq b,\quad a\leqq y\leqq b,\quad a\leqq \xi\leqq b,$$

中爲有限,及「其在此立方中之不連續點」只在「母線(generator)與 x 軸及 y 軸平行之兩組柱面(cylinder)」之上;又此諸柱與任意直線 $x=x_0, y=y_0$ 之交點〔在此立方中者〕皆只有有限個也.至其形式上之證明,讀者可自爲之(以上所言者爲證明之基礎,知此則此證卽無困難矣).

系 若 $\phi(x,y)$ 及 $\psi(x,y)$ 在 T 中有限,及如有不連續點時其不連續點爲規則分佈;則函數

$$H(x,y)=\int_y^x \phi(x,\xi)\psi(\xi,y)d\xi$$

在 T 中爲連續.

此爲定理1之一特例,其理如下:若 ϕ 及 ψ 作爲在 T 外皆等於 O,卽可知其在 S 中已完全滿足定理1中之條件,而 $F(x,y)$ 亦卽化爲 $H(x,y)$ 矣.

若 $\phi(x,y)$ 滿足定理1中諸條件,則 ϕ 在 S 中之二重積分(double integral)可作爲兩層積分,(iterated integral)* 及可以

* 二重積分及二層積分之定義不同.二重積分爲 limit $\Sigma\phi(x,y)\Delta x\Delta y$,而二層積分爲積分之積分.此乃言其大略,其詳可參考拙譯拔氏函數第一册.

兩層積分之兩法中之任意一法求之(卽變數可以交換)而得公式

$$\int_a^b\int_a^b \phi(x, y)dy\,dx = \int_a^b\int_a^b \phi(x, y)dx\,dy.$$

其特例,若 ϕ 在 T 外皆爲0,則得.

Dirichlet 氏公式.† 若 ϕ 在 T 中爲有限,及如有不連續點時,其不連續點爲規則分佈;則.

$$\int_a^b\int_a^x \phi(x, y)dy\,dx = \int_a^b\int_y^b \phi(x, y)dx\,dy.$$

此公式有時可推廣至「被積函數 (integrand) 在 T 中不常爲有限」之積分〔卽在某種情形之下,ϕ 在 T 中點上雖不盡爲有限,而上式亦有成立者〕.其最普通之情形,爲以下有時應用者,包括在下公式之中;此在 W. A. Hurwitz 氏†之論文之首部中有一簡單之證明,讀者可參考之.

Dirichlet 氏之推廣公式 (extended formula). 若 $\phi(x,y)$ 在 T 中爲有限,及如有不連續點時,其不連續點爲規則分佈.又若 λ, μ, ν 爲合於

$$0 \leqq \lambda < 1, 0 \leqq \mu < 1. 0 \leqq \nu < 1,$$

之三常數;則

$$\int_a^b\int_a^x \frac{\phi(x, y)dy\,dx}{(x-y)^\lambda(b-x)^\mu(y-a)^\nu} = \int_a^b\int_y^b \frac{\phi(x, y)dx\,dy}{(x-y)^\lambda(b-x)^\mu(y-a)^\nu}$$

* 參考 Crelle's Journal, vol. 17 (1837), p. 45.

† Sunals of mathematics. vol 9 (1908). 此結果亦可從 de la vallée Poussin 氏之一普通定理求得.參考氏所著之 Cours d'Analyse vol 2, p 89—95.

再述關於一變數之若干定理如下:

定理2. 若$\phi(x)$在I中爲有限, 及在I中只有有限個不連續點, 則函數

$$\Phi(x)=\int_a^x \frac{\phi(\xi)d\xi}{(x-\xi)^\lambda} \qquad (\lambda<1)$$

在I中爲連續; 此a在I中, 及此函數在a上等於0.*

欲證此理, 先換積分之變數, 令

$$S=\frac{\xi-a}{x-a}$$

則 $$\Phi(x)=(x-a)^{1-\lambda}\int_0^1 \frac{\phi[a+s(x-a)]}{(1-s)^\lambda}ds=(x-a)^{1-\lambda}\Psi(x)$$

$$(a<x\leqq b).$$

再以ϕ之絕對值 (absolute value). 之上限 (upper limit) 代ϕ, 可知$\Psi(x)$常爲有限, 故x逼近 (approach) a時, $\Phi(x)$逼近於0. 故ϕ在a上爲連續. 再從相同之代入法, 可知x合於$a<x\leqq b$時Ψ爲匀斂 (uniformly convergent). 再設

$$\Psi_1(x)=\int_0^{1-\delta}\frac{\phi[a+s(x-a)]}{(1-s)^\lambda}ds,$$

則因Ψ_1中之被積函數在矩形 (rectangle)

$$a<x\leqq b,\quad 0\leqq s\leqq 1-\delta$$

中爲有限及其不連續點只在此矩形中有限條曲線之上, 而此各曲線與直線$x=x_0$至多交於一點; 故凡$\delta<1$時, 此Ψ_1必

* 不問函數ψ之性質如何, $\int_a^a \psi(x)dx$之值爲0. [此爲定義].

在 $a<x\leqq b$ 節中連續.再因從上可知當 δ 逼近於 0 時, $\Psi_1(x)$ 均勻逼近於 $\Psi(x)$, 從勻斂之根本定理可知 $\Psi(x)$ 在 x 合於 $a<x\leqq b$ 時, $\Psi(x)$ 爲連續, 故 $\Phi(x)$ 亦必如此. 而本定理已經證明.

定理 3. 若在 I 中 $\phi(x)$ 爲連續及有導式 (derivative) 且此導式爲有限及至多在 I 中只有有限個不連續點; 又若 $\phi(a)=0$; 則函數.

$$\Phi(x)=\int_a^x\frac{\phi(\xi)}{(x-\xi)^\lambda}d\xi \qquad (\lambda<1)$$

有在 I 中連續之導式, 而此導式爲

$$\Phi'(x)=\int_a^x\frac{\phi'(\xi)}{(x-\xi)^\lambda}d\xi$$

證. 作 $\Phi(x)$ 之分部積分 (by parts), 則因 $\phi(a)=0$, 而得

$$\Phi(x)=\frac{1}{1-\lambda}\int_a^x(x-\xi)^{1-\lambda}\phi'(\xi\, d)\xi$$

再由積分之微分法 (rule for differentiating an integral) (積分極限 (limit) 爲變數者), 就 x 微分此式, 卽得定理中代表 $\Phi'(x)$ 之式. 故從定理 2, 此 $\Phi'(x)$ 爲連續. 此宜注意者, $\lambda>0$ 時, 上所討論之積分皆爲無限積分 (infinite integral), (卽「被積函數不常爲有限」之積分). 因此應用微積分中之尋常方法時, 須加留意.

此亦可用 Dirichlet 氏推廣公式* 轉轉證明之如下: 先

* 此宜注意者, 現在用此公式於函數 $\phi(x, y)$ 上限制, 稍有變更; 此因現在之 ϕ 但爲 y 之函數, 故若 ϕ 爲不連續, 則其不連續爲沿平行 x 軸之諸直線之不連續,

$$\Phi(x)=\int_a^x \frac{1}{(x-\xi)^\lambda}\int_a^\xi \phi'(s)ds\,d\,\xi=\int_a^x \phi'(s)\int_s^x \frac{d\xi}{(x-\xi)^\lambda}ds$$

$$=\int_a^x \phi'(s)\int_s^x \frac{d\xi}{(\xi-s)^\lambda}ds=\int_a^x\int_a^\xi \frac{\phi'(s)}{(\xi-s)^\lambda}ds\,d\,\xi.$$

再微分此末一式,卽得本定理所欲證明之結果*

再加數語,以結本款.從下設二例,可知ϕ'爲有限之條件,若改爲可積 (integrability) 之條件 (甚至改爲絕對可積 (absolute integrability) 之條件) 時,ϕ卽未必常有連續之導式:

(1) $\phi(x)=(x-a)^\lambda,$ $\Phi(x)=k(x-a),$

(2) $\phi(x)=\begin{cases}0 & (a\leqq x\leqq a')\\ (x-a')^\lambda & (a'<x\leqq b),\end{cases}$ $\Phi(x)=\begin{cases}0 & (a\leqq x\leqq a')\\ k(x-a') & (a'<x\leqq b).\end{cases}$

在此二例中,k爲常數,(constant) 及若λ合於$0<\lambda<1$,則ϕ在I中爲連續及在I中除去一點外有連續之導式,及此導式爲絕對可積而非有限.Φ'在第一例爲連續,在第二例卽爲不連續.

---

*上之證法,可推廣至範圍更廣之公式

$$\frac{d}{dx}\int_a^x \psi(x-\xi)\phi(\xi)d\xi=\int_a^x \psi(x-\xi)\phi'(\xi)d\,\xi,$$

卽與ψ以適宜之條件,可卽用上之推理法證明此式爲眞.

2. Abel氏之力學上問題

在 Abel 氏最早印行之論文中* 曾示如何從一力學問題 (mechanical problem) (tautochrone 問題爲此問題之特例),發生一積分方程式,而此問題之解決全恃此方程式之解法因其在歷史上極有趣味.故述此問題於下.

設有在垂直平面上之曲線,一質點 (particle) 在此曲線上之一點 P 沿此曲線而下至最低點 O 此質點在 O 上之速度與曲線之形狀無關,而其從 P 至 O 所費之時間 T 則隨此曲線之形狀而變.在此曲線所在之平面中,以 O 爲原點,以縱軸 (vertical) 爲 x 軸,以橫軸 (horizontal) 爲 y 軸.設此質點之起點 (point of departure) P 之坐標爲 (x, y),而其至 Q 點所費之時爲 t, Q 之坐標爲 (ξ, η), g 爲重率常數, (gravitational constant) 及弧 OQ 爲 s,則此質點在 Q 上之速度爲

$$-\frac{ds}{dt} = \sqrt{2g(x-\xi)}$$

故

$$\sqrt{2g}\,t = -\int_P^Q - \frac{ds}{\sqrt{x-\xi}}$$

---

* 參觀 Colleced Works p. 11. 此文最初於1823年在 Christiania 發表.又可參觀 Collected Works 上之第二篇論文 (由 p. 97 起),此文原係發表於 Crelle, vol. I (1826) 上者 (p. 153)

若 s 以 ξ 之項表之,而

$$s=v(\xi)$$

則此質點從 P 至 O 之總時間爲

$$T=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^x\frac{v'(\xi)d\xi}{\sqrt{x-\xi}}$$

若曲線之形狀已知,則函數 v 卽可求得,而此質點由 P 至 O 之總時間亦可從此公式求得.

Abel 氏之問題爲此問題之逆.卽設一質點由 P 至 O 之總時間已知其爲 x 之函數,而反求此曲線也.[簡言之,卽上問題爲已知曲線之形狀而求質點在其上落下之總時間;而 Abel 氏之問題則已知此落下之總時間,而反求此曲線之形狀也].若令

$$\sqrt{2g}\,T=f(x),$$

則 Abel 氏之問題,卽從方程式

$$f(x)=\int_0^x\frac{v'(\xi)d\xi}{\sqrt{x-\xi}} \tag{1}$$

求函數 v.此 (1) 卽是一積分方程式.

Abel 氏曾有兩法可求得此積分方程式之解 (solution) 之公式.其第一法爲憑此自變數 (argument) 之昇冪級數 (power series) 求之而此冪 (power) 不一定爲整數;其第二法具更廣之特性 (general character),與下款之法相類. Abel 氏之兩法雖得眞確之結果,但皆不能認爲適宜之方法.其又一可反對處,卽其二法皆未證明「此方程式 (1) 有一解」,蓋此在理論上爲不可缺少之步驟也.

3. Abel氏方程式之解*

Abel氏曾從事於一範圍更廣之方程式,此式如下:

$$f(x)=\int_a^x \frac{u(\xi)d\xi}{(x-\xi)^\lambda} \qquad (0<\lambda<1) \qquad (1)$$

此式中之f爲一已知函數,u爲所求之函數.

欲解此方程式,可先作一下之普通方程式(2).此可從一著名公式

$$\frac{\pi}{\sin\mu\pi}=\int_\xi^z \frac{dx}{(z-x)^{1-\mu}(x-\xi)^\mu} \qquad (0<\mu<1)$$

起.

設$\phi(\xi)$爲既在I中連續,又在I中有一連續導式之任意函數.以$\phi'(\xi)d\xi$乘上公式,而從a至z求其積分(此z爲I中之任意一點),則得.

$$\frac{\pi}{\sin\mu\pi}\Big[\phi(z)-\phi(a)\Big]=\int_a^z\int_\xi^z \frac{\phi'(\xi)}{(z-x)^{1-\mu}(x-\xi)^\mu}dx\,d\xi.$$

再應用 Dirichlet 氏推廣公式於此式之右邊,卽得所求之(2)爲

---

*此除求得(2)之方法外,其餘所用之方法爲(Liouville)氏之法.見 Liouville's Journal vol. 4 (1839), p. 233. Liouville 氏先巳在 Journal de l'Écol Polytechnique Cahier 21 (1832), p. 1.中發表其涉及此題之論文,彼似未知 Abel 氏之著作.

$$\phi(z)-\phi(a)=\frac{\sin\mu\pi}{\pi}\int_a^z\frac{1}{(z-x)^{1-\mu}}\int_a^x\frac{\phi'(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{\mu}}dx \tag{2}$$

此公式在下三條件之下成立: (一) z 在 I 中, (二) $\phi(z)$ 在 I 中旣爲連續又有連續導式, (三) μ 合於 $0<\mu<1$.

從 1 款定理 2 可知「(1) 在 I 中有一連續解」(solution continuous throughout I) 之必要條件爲: $f(x)$ 在 I 中連續及 $f(a)=0$.

設諸條件已全滿足, 及 $u(x)$ 爲 (1) 之連續解. 以 $(z-x)^{\lambda-1}dx$ 乘 (1) [此 z 爲 I 中之一點], 而從 a 至 z 求其積分, 則得

$$\int_a^z\frac{f(x)dx}{(z-x)^{1-\lambda}}=\int_a^z\frac{1}{(z-x)^{1-\lambda}}\int_a^x\frac{u(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{\lambda}}dx.$$

若在 (2) 中, 命

$$\phi(x)=\int_a^x u(\xi)d\xi,$$

則上式變爲

$$\int_a^z\frac{f(x)dx}{(z-x)^{1-\lambda}}=\frac{\pi}{\sin\lambda\pi}\int_a^z u(\xi)d\xi. \tag{3}$$

因 (3) 之右邊, 關於 z 有一連續導式, 其左邊亦必如此. 由是又得「(1) 有一連續解」之一必要條件. 此條件卽 (3) 之左邊須有一關於 z 之連續導式是也. 微分 (3) 式, 卽得 (1) 之連續解爲

$$u(z)=\frac{\sin\lambda\pi}{\pi}\frac{d}{dz}\int_a^z\frac{f(x)dx}{(z-x)^{1-\lambda}}. \tag{4}$$

由是 u 已完全決定, 卽 (1) 只有此一連續解, 而別無他連續解

欲知 (4) 確爲 (1) 之解, 可以之代入 (1) 中而驗之. 代入後 (1) 右變爲

$$\frac{\sin\lambda\pi}{\pi}\int_a^x\frac{1}{(x-\xi)^\lambda}\frac{d}{d\xi}\int_a^\xi\frac{f(x)dx}{(\xi-x)^{1-\lambda}}d\xi,$$

從1款定理3,此變爲

$$\frac{\sin\lambda\pi}{\pi}\frac{d}{dx}\int_a^x\frac{1}{(x-\xi)^\lambda}\int_a^\xi\frac{f(x)dx}{(\xi-x)^{1-\lambda}}d\xi,$$

再從(2)及令

$$\phi(z)=\int_a^z f(x)dx$$

則此式又變爲

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(z)dz=f(x)$$

由是可知(4)爲(1)之解,而下之定理1已經證明:

定理1. (1)在I中有一連續解之充要條件(necessary and sufficient condition)爲:(一)$f(x)$在I中連續及$f(a)=0$,(二)爲

$$\int_a^x\frac{f(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{1-\lambda}}$$

在I中有連續導式.若此諸條件已全滿足,則(1)只有一連續解而此解可從公式(4)求得.(充要條件卽旣充分而又必要之條件,以下仿是).

又若f在I中爲連續及有一連續導式,此導式在I中爲有限及至多只有有限個不連續點及$f(a)=0$,則從1款定理3可知上定理之條件已全滿足,而(4)可爲

$$u(z)=\frac{\sin\lambda\pi}{\pi}\int_a^z\frac{f'(x)dx}{(z-x)^{1-\lambda}}\tag{5}$$

此爲一重要情形,以定理明之如下:

定理2. 若在 I 中 $f(x)$ 爲連續及有一連續導式.及此導式在 I 中只有有限個不連續點,及 $f(a)=0$,則方程式(1)有(及只有)一連續解,而此解可從公式(5)* 求得.

此本爲 Abel 氏之結果;但數學家往往不討論此積分方程式(1),而喜討論微積方程式(differentio-integral equation

$$f(x)=\int_a^x \frac{v'(\xi)d\xi}{(x-\xi)^\lambda} \qquad (0<\lambda<1) \qquad (6)$$

從上定理及1款之定理2, 3可得下之結果:

定理3. '(6)式有一連續解及其解有一在 I 中之連續導式'之充要條件爲: $f(x)$ 在 I 中連續及 $f(a)=0$, 及

$$\int_a^x \frac{f(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{1-\lambda}}$$

在 I 中有一連續導式.若此諸條件已全滿足,則(6)之通解

$$v(z)=k+\frac{\sin\lambda\pi}{\pi}\int_a^z \frac{f(x)dx}{(z-x)^{1-\lambda}}.$$

此 k 爲一隨意常數(arbitrary constant).

---

* Goursat 氏在 Acta Math. vol. 27 (1903), pp. 131—133 中曾說明,若去 $f(a)=0$ 之條件,則方程式(1)仍有一解.不過非連續而已.此以

$$v(x)=u(x)-\frac{\sin\lambda\pi}{\pi}\frac{f(a)}{(x-a)^{1-\lambda}}.$$

置 u 之地位,卽易明白.以此代 u 後,方程式(1)卽變爲

$$f(x)-f(a)=\int_a^x \frac{v(\xi)d\xi}{(x-\xi)^\lambda}.$$

反是,此方程式之解與(1)之一解相應.故(1)之一解爲

$$u(z)=\frac{\sin\lambda\pi}{\pi}\frac{f(a)}{(z-a)^{1-\lambda}}+\frac{\sin\lambda\pi}{\pi}\int_a^z \frac{f'(x)dx}{(z-x)^{1-\lambda}}$$

令$\lambda=\frac{1}{2}$,則得2款力學問題之解.其特例若$f(x)$=常數,則得tautochrone問題之Abel氏解.

λ為負數時,此結果亦易推廣而得其解(參考Liouville, loc. cit.).例如λ合於$-1<\lambda<0$,則從微分法,可知凡(1)之連續解必能滿足方程式

$$f'(x)=-\lambda\int_a^x\frac{u(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{\lambda+1}}.$$

反是.若$f(x)$在I中連續,及$f(a)=0$,則從積分法可知凡(7)之連續解.亦必為(1)之解.故

定理4. 若λ合於$0>\lambda>-1$,則(1)有一連續解之充要條件為:$f(x)$及其一階導式(first derivative)皆在I中連續,及$f(a)=f'(a)=0$,及

$$\int_a^x\frac{f'(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{-\lambda}}$$

在I中有連續導式.若此諸條件已全滿足,則(1)有(及只有)一連續解,而此解為

$$u(z)=\frac{\sin\lambda\pi}{\lambda\pi}\frac{d}{dz}\int_a^z\frac{f'(x)dx}{(z-x)^{-\lambda}}$$

其特例,若$f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$皆在I中連續及$f(a)=f'(a)=0$,則上條件已全滿足,而其解可寫作

$$u(x)=\frac{\sin\lambda\pi}{\lambda\pi}\int_a^z\frac{f''(x)dx}{(z-x)^{-\lambda}}$$

λ爲他種負數時,可用逐次微分法解之,其理易明,無待詳論,凡λ爲負整數或0時之情形,及λ爲任意負數時之普遍定理(General theorem)及其證明之法,讀者可自爲之.

4. Liouville 氏之引出第二種積分方程式

在 Abel 氏後，第一用積分方程式者爲 Liouville 氏，渠在 1837* 年會示某種線微分方程式之特別解 (particular solution)，可從一種積分方程式求得之，此種積分方程式雖與 Abel 氏方程式相近，而有不同之處.

欲說明此事，可從非齊次方程式 (non-homogeneous equation)

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\rho^2y=\phi(x) \tag{1}$$

起. 此 ρ 爲一參數，(parameter) $\phi(x)$ 爲 I 中之連續函數.

其輔助方程式 (reduced equation)

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\rho^2y=0$$

之通解爲 $\alpha\sin\rho(x-a)+\beta\cos\rho(x-a)$，故從一著名公式，† 此 (1) 之通解爲

$$y(x)=\alpha\sin\rho(x-a)+\beta\cos\rho(x-a)+\frac{1}{\rho}\int_a^x\phi(\xi)\sin\rho(x-\xi)\,d\xi \tag{2}$$

再考齊次方程式 (homogeneous equation)

---

* Liouville's Journal vol 2. p. 24. 此與前款所引之 Liouvill 氏之著作無關.

† 參考 Forsyths 氏 Treatise on Differential Equations, § 66.

$$\frac{d\,y}{dx^2}+[\rho^2-\sigma(x)]y=0 \tag{3}$$

此 $\sigma(x)$ 在 I 中連續.設 $u(x)$ 爲能滿足兩輔助條件 (auxiliary condition).

$$u(a)=1,\ u'(a)=0. \tag{4}$$

之 (3) 之解.

此函數 $u(x)$ 亦爲非齊次方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\rho^2y=\sigma(x)u(x)$$

之解. 故從 (2) 及 (4) 得

$$u(x)=\cos\rho(x-a)+\frac{1}{\rho}\int_a^x\sigma(\xi)\sin\rho(x-\xi)u(\xi)d\xi. \tag{5}$$

反是,若 $u(x)$ 爲此積分方程式之任意連續解, 則以積分之微分法(積分極限爲 x 之函數) 求 (5) 之微分, 可知 $u(x)$ 之一二兩階導式 (first and second derivative) 可從兩公式,

$$u'(x)=-\rho^2\sin\rho(x-a)+\int_a^x\sigma(\xi)\cos\rho(x-\xi)u(\xi)d\xi \tag{6}$$

$$u''(x)=-\rho^2\cos\rho(x-a)-\rho\int_a^x\sigma(\xi)\sin\rho(x-\xi)u(\xi)d\xi+\sigma(x)u(x) \tag{7}$$

得之.

從公式 (5), (7) 可知 u 能滿足 (3), 而從 (5), (6) 可知 u 能滿足 (4) 之條件. 因滿足 (3), (4) 之函數只有此一個, 故已證明下之定理:

定理. 微分方程式 (3) 之解, 其能滿足 (4) 之條件者爲此

積分方程式(5)之解;反是,此積分方程式(5)只有一連續解.

以上所示者,爲一微分方程式及某種輔助條件,可同以一積分方程式表之.此爲積分方程式之許多應用上之一特性

Liouville 氏引出積分方程式(5)之目的,乃欲藉此可將 $u(x)$ 展開爲一級數.及此級數能對於 ρ 之大值收斂極速.解此(5)式求得此種級數之一法,當於下款述之.

以 Abel 氏方程式[1款公式(1)]及 Liouville 氏方程式比較,可知此兩種方程式在下兩形式(type)之下:

$$f(x)=\int_a^x K(x,\xi)u(\xi)d\xi \tag{8}$$

$$u(x)=f(x)+\int_a^x K(x,\xi)u(\xi)d\xi \tag{9}$$

此式中之 $f(x)$ 及 $K(x,\xi)$ 皆爲已知函數,而 $u(x)$ 爲所求之函數.此(8),(9)兩方程式依次謂之第一種第二種線積分方程式 K 謂之此類方程式之核(kernel)*

此(8),(9)兩方程式中積分之上限爲變數 x.但吾人常討論改此 x 爲 b 之方程式[卽形式與(8),(9)相同,惟積分上限 x

* 此類名稱 Hilbert 氏首用之,見 Göttinger Nachrichten, 1904.方程式之爲

$$\psi(x)u(x)=f(x)+\int_a^b K(x,\xi)u(\xi)d\xi,$$

形式者,包括第一第二兩種方程式,而以此兩種方程式爲其特例,Hilbe-rt 氏謂之第三種方程式.但不過其一種特例曾經討論而已.

改爲 b 之方程式]. 此種方程式亦謂之第一種第二種線積分方程式. 而上之(8), (9) 兩式不過爲其特例, 因在此兩種方程式中,設 $\xi > x$ 時 $K(x, \xi) = 0$, 則無論以 x 或 b 爲積分上限,其結果無分別也.

(9)(或其積分上限 x 爲 b 之更廣方程式)之特例,卽其 $f(x)$ 恆等於 0 者, 謂之第二種齊次 (homogeneous) 積分方程式. 此與第一種積分方程式不同, 宜加注意, 勿使相混.

5. 逐次代入法†

Liouville 氏所用解前款方程式(5)之方法. 用以解比前款更廣之方程式(9), 亦有同樣之便利. 今就前款末節所言更廣之方程式

$$u(x)=f(x)+\int_a^b K(x,\xi)u(\xi)\,d\xi \tag{1}$$

論之.

設此核 K 在 S 中有限, 及如有不連續點時, 其不連續點在 S 中規則分佈.*

若(1)在 I 中有一連續解, 則 $f(x)$ 在 I 中亦必連續(參觀 1 款定理 1).

在(1)中令 $x=\xi$, 以其結果 $u(\xi)$ 代入(1)右中 $u(\xi)$ 之地位, 得

$$u(x)=f(x)+\int_a^b K(x,\xi)\,f(\xi)\,d\xi+\int_a^b K(x,\xi)\int_a^b K(\xi,\xi_1)u(\xi_1)d\xi_1\,d\,\xi.$$

---

† 解第二種積分方程式之此種方法, 尋常皆以爲 C. Neumann 氏所貢獻, 實則其著作遠在 Liouville 氏著作三十年之後. 此乃常人於 Liouville 氏之著作及第二種積分方程式之理論間之關係未曾注意耳. 此逐次代入法尚可用於更複雜之情形, 詳見 Mason. Math. Ann. vol. 65 (1908), p. 570.

* 在本款及下款中, 此 f 及 K 爲實或複素均可. [實變數函數略曰實函數, 複素變數函數略曰複函數, 爲實或複卽爲實變數函數或複素變數函數之意. 以下仿此].

再在此式中,命 $x=\xi_1$,以其結果代入此式右邊 $u(\xi_1)$ 之地位,卽得一代表 $u(x)$ 之四項式 (four term expression),照此繼續進行,得一普遍公式.

$$u(x)=S_n(x)+R_n(x), \tag{2}$$

此中

$$S_n(x)=f(x)+\int_a^b K(x,\xi)f(\xi)\,d\xi+\int_a^b K(x,\xi)\int_a^b K(\xi,\xi_1)\,f(\xi_1)d\xi_1\,d\xi$$

$$+\cdots+\int_a^b K(x,\xi)\int_a^b K(\xi,\xi_1)\cdots\int_a^b K(\xi_{n-2},\xi_{n-1})f(\xi_{n-1})d\xi_{n-1}\cdots d\xi_1\,d\xi,$$

$$R_n(x)=\int_a^b K(x,\xi)\int_a^b K(\xi,\xi_1)\cdots\int_a^b K(\xi_{n-1},\xi_n)u(\xi_n)d\xi_n\cdots d\xi_1\,d\xi.$$

此表 $u(x)$ 之式,可作爲「$n+1$ 項之有限級數加一尾部」(remainder) 之和,此尾部中仍含一吾人所展之函數 $u(x)$.† 由此暗示,可就無限級數

$$f(x)+\int_a^b K(x,\xi)f(\xi)d\xi+\int_a^b K(x,\xi)\int_a^b K(\xi,\xi_1)f(\xi_1)d\xi_1d\xi+\cdots \tag{3}$$

討論之.

從1款定理1,可知此級數之各項皆在 I 中連續.故若此級數在 I 中勻斂,則此級數在 I 中連續.於是可「證凡此級數爲勻斂時,(3) 所代表之函數 $u(x)$ 爲 (1) 之解」如下:先在此級數中命 $x=\xi$,其結果爲 $u(\xi)$,再以 $K(x,\xi)$ 乘之.再從 a 至 b 就 ξ 分項求其積分[因已假定此級數爲勻斂],則所得之結果正與在 (3) 中取去首項 $f(x)$ 之結果相同.由是得

†參考有尾部之 Taylor 氏級數之各形式.

$$\int_a^b K(x,\xi)u(\xi)d\xi = u(x) - f(x),$$

而此卽積分方程式(1),亦卽適欲證明 $u(x)$ 爲其一解之積分方程式.

今求(3)爲勻斂之兩充要條件如下:

先就

$$\xi > x \text{ 時}, \qquad K(x,\xi) = 0 \tag{4}$$

之情形考之

前已言明此卽以(1)中積分之上限改爲 x 之積分方程式.故其相應級數(3)之公項(general term)爲.

$$F_n(x) = \int_a^x K(x,\xi)\int_a^\xi K_1(\xi,\xi_1)\cdots\int_a^{\xi_{n-1}} K(\xi_{n-1},\xi_n) f(\xi_n)d\xi_n \cdots d\xi_1 d\xi.$$

設 M 及 N 爲合於

$$|K(x,\xi)| < M, |f(x)| < N \quad (a \leqq \xi \leqq x \leqq b)$$

之兩常數,則

$$|F_n(x)| \leqq NM^{n+1}\int_a^x\int_a^\xi\cdots\int_a^{\xi_{n-1}} d\xi_n \cdots d\xi_1 d\xi = NM^{n+1}\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\leqq N\frac{[M(b-a)]^{n+1}}{(n+1)!} \quad (a \leqq x \leqq b)$$

以 $N\frac{[M(b-a)]^{n+1}}{(n+1)!}$ 爲公項之級數,必爲收斂,故級數(3)在 I 中必旣爲絕對收斂(absolutely convergent),又爲均勻收斂(uniformly convergent).

在 K 上去(4)之條件,則對於相應級數(3)之公項,可以同

法求得與上相類之不等式,即

$$|F_n(x)| \leqq NM^{n+1}\int_a^b\int_a^b\cdots\int_a^b d\xi_n\cdots d\xi_1\, d\xi = NM^{n+1}(b-a)^{n+1},$$

以此 $NM^{n+1}(b-a)^{n+1}$ 爲公項之級數,但在

$$M(b-a)<1 \tag{5}$$

時爲收斂.

由是可知 (4) 或 (5) 之兩條件中,有一滿足時,級數 (3) 爲絕對收斂,且均勻收斂.

再證在此兩種情形之任意一種之下,(1) 之連續解皆只有一個如下:凡 (1) 之連續解皆爲 (2) 式所代表. 今就 (2) 中之 $R_n(x)$ 而論,若 $|u(x)|$ 在 I 中之最大值以 N' 表之,則用以上推求關於 $F_n(x)$ 之不等式之法,可得.

若 $\xi>x$ 時 $K(x,\xi)=0$,則

$$|R_n(x)| \leqq N'\frac{[M(b-a)]^{n+1}}{(n+1)!}.$$

若 $M(b-a)<1$,則

$$|R_n(x)| = N'[M(b-a)]^{n+1}$$

由是,則此二者皆

$$\lim_{n=\infty} R_n(x)=0.$$

又 $S_n(x)$ 卽 (3) 之前 $n+1$ 項之和,故 (2) 所表之函數 u 卽 (3) 之值,故得下之兩定理:

定理 1. 若 $K(x,\xi)$ 在 T 中爲有限,及如有不連續點時其

不連續點在T中規則分佈;則

$$u(x)=f(x)+\int_a^x K(x,\xi)u(\xi)d\xi \tag{6}$$

在I中有一連續解之充要條件爲: $f(x)$在I中連續若此條已滿足則(6)有(及只有)一連續解,而此解卽既絕對收斂又爲均匀收斂之級數(3)之和.

定理2. 設(一) $K(x,\xi)$在S中爲有限,及如有不連續點時其不連續點在S中規則分佈; (二) $f(x)$在I中連續; (三) M爲$|K|$在S中之上限及

$$M(b-a)<1,$$

則方程式(1)有(及只有)一「在I中連續之解」,而此解卽既爲絕對收斂又爲均匀收斂之級數(3)之和.

在已經證明其爲存在之連續解外,此第二種積分方程式亦可再有不連續之解.欲明此理可就

$$a=0, f(x)=0, K(x,\xi)=\xi^{x-\xi}$$

之特例考之.在此特例之下,積分方程式(6)變爲

$$u(x)=\int_0^x \xi^{x-\xi}u(\xi)d\xi \tag{7}$$

若b爲一任意正常數,則定理1之條件已全滿足:此方程式(7)有(及只有)一連續解,而此解卽$u=0$;凡第二種齊次積分方程式皆有此$u=0$之解乃極易明白之事,無待詳論.從直接代入法,可知此方程式(7)尚有無限個不連續解,卽

$$u(x)=kx^{z-1}$$

此k爲不等於0之任意常數[因k之値有無限種,故(7)有無限個此種不連續解].

此宜注意者,$x=0$時,不但此類之解其値爲無限而已,甚至此無限之力,強至$\int_0^b u(x)dx$爲發散.此有易明之一事,卽此積分方程式若能滿足定理1及2之一切條件,則凡其能有之不連續解皆爲不可積.* (non-integrable)

此種不可積之不連續解無甚重要.本書不討論之.

本款於以上所論之外,有自然發生之問題,尙須進論.其一爲在何種條件之下,「(1)或(6)之連續解」能有一連續導式.設$K(x,\xi)$及$\partial K/\partial x$在S中皆爲有限,及此二函數如有不連續點時不連續點在S中規則分佈.又設K之不連續點在無二重點(double point)之諸曲線上(此諸曲線所有之連續迴轉之切線無一與x軸或ξ軸平行).從此可知在「K在其上不連續之曲線」上(此諸曲線與S之邊界之諸交點或須除去),K與其諸連續界値(continuous boundary values)連續地相連(在曲線之兩旁K之値自然不同)故可留心求方程式(1)之微分而得:在上言之條件之下,(1)之連續解在開節(open iuterval) $a<x<b$中能有連續導式之充要條件爲:$f(x)$在此開節中有連續導式.在K上加限制力較小之條件,自然亦能得與

*第一種積分方程式,在相類條件下,能有一可積之不連續解.此宜注意.參觀3款定理2之附註

此相類之結果.

第二自然發生之問題,爲核爲無限時,(1)或(6)之連續解是否存在.今但取一特例考之,作爲其他之例.

設在方程式(6)中,K定於T中而

$$K(x,\xi)=\frac{G(x,\xi)}{(x-\xi)^{\lambda}}\quad(0<\lambda<1),$$

此G在T中有限,及如有不連續點時,其不連續點在T中規則分佈.於是若$\psi(x)$爲I中之任意連續函數,則函數

$$\int_a^x K(x,\xi)\psi(\xi)d\xi$$

在I中亦爲連續.此理易明,不必再證.

故若$f(x)$在I中連續,則由此K所生之級數(3)之各項亦必在I中連續.所宜記憶者,積分之上限在本例爲變數.

從此級數之公項$F_n(x)$,顯可得

$$|F_n(x)|\leqq NM^{n+1}\int_a^x\frac{1}{(x-\xi)^{\lambda}}\int_a^{\xi}\frac{1}{(\xi-\xi_1)^{\lambda}}\cdots\int_a^{\xi_{n-1}}\frac{1}{(\xi_{n-1}-\xi_n)^{\lambda}}d\xi_n\cdots d\xi,$$

此中

$$|f(x)|\leqq N,\ |G(x,\xi)|\leqq M.$$

上不等式(inequality)之右邊,以

$$k_p=\int_0^1\frac{s^{p(1-\lambda)}}{(1-s)^{\lambda}}ds$$

表之,則上不等式右邊之$(n+1)$層積分$\{(n+1)-\text{fold integral}\}$易知其值,而得

$$|F_n(x)|\leqq NM^{n+1}k_0k_1\cdots k_n(x-a)^{(n+1)(1-\lambda)}.$$

由是,若能證明以

$$NM^{n+1}k_0k_1\cdots k_n(b-a)^{(n+1)(1-\lambda)} \tag{8}$$

爲公項之級數爲收斂,則(3)自必因之而爲絕對收斂及均勻收斂,今形式爲(8)之隣接兩項(successive term)之比爲

$$M(b-a)^{1-\lambda}k_n.$$

故若能證明

$$\lim_{n=\infty} k_n = 0, \tag{a}$$

則(3)必爲絕對收斂及均勻收斂.至諸k之有此性質[卽(a)之極限爲眞],從其定義自知.

此(3)之勻斂旣經證實,則此級數能代表此積分方程式之連續解,及此積分方程式只有此一解,皆可如前證明之而得

定理3. 設有方程式

$$u(x)=f(x)+\int_a^x \frac{G(x,\xi)}{(x-\xi)^\lambda}u(\xi)d\xi \quad (0<\lambda<1)$$

其$f(x)$在I中連續;其G在T中爲有限及如有不連續點時,其不連續點在T中規則分佈,則此方程式有(及只有)一連續解;及此解可以逐次代入法求得,而其形式爲一絕對收斂,并均勻收斂之級數.

6. 第二種積分方程式之 Volterra 氏解法

層疊函數及逆函數(reciprocal function)

今再依 Volterra 氏之方法討論第二種積分方程式*

設 $K(x, y)$ 在 S 中為有限及如有不連續點時, 其不連續點在 S 中規則分佈.今照公式

$$\begin{aligned} K_1(x, y) &= K(x, y) \\ K_i(x, y) &= \int_a^b K(x, \xi) K_{i-1}(\xi, y) d\xi \end{aligned} \tag{1}$$

作層疊函數 $K_1, K_2, \cdots$

從1款定理1, 可知除 K_1 之外,其餘之 $K_2, K_3, \cdots$ 皆在 S 中連續.

逐次用(1)式,可得

---

*有六篇論文可作本款及下款之參考, 四篇見 Turin Academy 之 Atti vol. 31, 1896 (Jan. 12—April 26) 他二篇見 Accademia dei Lincei 之 Rendiconti Series 5, vol 5[1], 1896 (March, April).此諸論文以後引證時,可分別稱為 Torino I, II, III, IV, 及 Lincei I, II. 同著者在 Annali di Matematica, ser 2, vol. 25. (1897), p.139 中尚有一論文,此處可資引證, Volterra 關於積分方程式之著作可謂始於1884年之"Sopra un Problema di Elettrostatica" 見 atti d.R. Accad.dei Lincei, ser. 3, Transunti, vol. 8. p. 315, 此文指出其與變分法之關係.至對於本款可參考 Lincei I.

$$K_i(x,y)=\int_a^b\cdots\int_a^b K(x,\xi_1)K(\xi_1,\xi_2)\cdots K(\xi_{i-1}y)d\xi_{i-1}\cdots d\xi_1 \qquad (2)$$

先照(2)式,以$(i-1)$層積分及$(j-1)$層積分依次表$K_i(x,\xi)$及$K_j(\xi,y)$,則$\int_a^b K_i(x,\xi)K_j(\xi,y)d\xi$為$(i+j-1)$層積分;再換其積分之次序及變數之記號,則此$\int_a^b K_i(x,\xi)K_j(\xi,y)d\xi$之値正與「(2)法所表$K_{i+j}(x,y)$」之値相同.由是得一重要公式

$$K_{i+j}(x,y)=\int_a^b K_i(x,\xi)K_j(\xi,y)d\xi \quad (i,j=1,2,\cdots) \qquad (3)$$

此包括定義(1),卽可以定義(1)作為其特例.

若$y>x$時$K(x,y)=0$,則從(1)可知$y>x$時無論i為何數,$K_i(x,y)$亦必為0.故在此種情形之下,(3)可寫作

$$K_{i+j}(x,y)=\int_y^x K_i(x,\xi)K_j(\xi,y)d\xi \quad (i,j=1,2,\cdots) \qquad (4)$$

此乃 Volterra 氏所惟一討論者,其所用之公式卽此公式(4)

今再論其普遍之情形.設就級數

$$K_1(x,y)+K_2(x,y)+K_3(x,y)+\cdots \qquad (5)$$

考之.

此級數在某種情形之下,其在S中為勻歛,俟後再論.今先假定其在S中為勻歛,而以$-k(x,y)$表(5)之値.因(5)中各項,除首項之外皆在S中連續,及已假定(5)在S中為勻歛,故$K(x,y)$在S中為有限,及如有不連續點,亦必卽為$k(x,y)$之不連續點.

設(5)之前n項之和,以$S_n(x,y)$表之,此後之尾部,以$R_n(x,y)$

表之,而

$$R_n(x,y)=\sum_{i=n+1}^{\infty}\int_a^b K_{i-j}(x,\xi)K_j(\xi,y)d\xi. \tag{6}$$

在此公式中,整數 j 可在各項中任意變動,只要其值常小於 i 而已.

先設 j 在一切項中皆等於 n 則(6)中之級數可從級數

$$-k(x,\xi)=\sum_{i=n+1}^{\infty}K_{i-n}(x,\xi) \tag{5'}$$

得之如下:以 $K_n(x,y)$ 乘(5'),再分項求其積分(因上已假定(5)在 S 中為匀斂,及已知(5)中從第二項起之各項在 S 中皆為連續,可以如此求積分),則得

$$R_n(x,y)=-\int_a^b k(x,\xi)K_n(\xi,y)d\xi. \tag{7}$$

又設(6)中之 j 在各項中皆等於 $i-n$,則(6)中之級數又可從

$$-k(\xi,y)=\sum_{i=n+1}^{\infty}K_{i-n}(\xi,y), \tag{5''}$$

得之如下:以 $k_n(x,\xi)$ 乘(5''),再分項求其積分,則得尾部之第二形式,即

$$R_n(x,y)=-\int_a^b K_n(x,\xi)k(\xi,y)d\xi \tag{8}$$

因

$$R_1(x,y)=-k(x,y)-K(x,y),$$

在(7),(8)令 $n=1$,則合之得

$$K(x,y)+k(x,y)=\int_a^b K(x,\xi)k(\xi,y)d\xi$$

$$=\int_a^b k(x,\xi)K(\xi,y)d\xi \tag{9}$$

此爲積分方程式中最基本公式之一.由此作一定義如下:

定義　若兩函數 $K(x,y)$ 及 $k(x,y)$,皆在 S 中爲有限,及如有不連續點時,其不連續點皆在 S 中規則分佈,及此兩函數能滿足 (9) 式;則此兩函數互謂之逆 (said to be reciprocal),卽 k 爲 K 之逆函數,K 爲 k 之逆函數*

在此定義下之兩函數之關係爲無關於其次序 (order),此從「交換 K 及 k 之位置而 (9) 之值不變」可知.又從 (9) 可知兩互逆函數之和爲連續,此從 1 款定理 1 可知.

於是可言第二種積分方程式

$$u(x)=f(x)+\int_a^b K(x,\xi)u(\xi)d\xi \tag{10}$$

之 Volterra 氏之美妙解法矣.今仍如前假定 K 在 S 中有限,及如有不連續點時,其不連續點爲規則分佈;幷假定 $K(x,y)$ 有逆函數 $k(x,y)$.

若 (10) 有一連續解 $u(x)$,則

*爲以後應用起見,須注意從此定義可知:若 K 及 k 爲互逆,及 $r(x)$ 在 I 中連續而不爲 0,則

$$\frac{r(x)}{r(y)}K(x,y) \text{ 及 } \frac{r(x)}{r(y)}k(x,y)$$

亦爲互逆.此乃 Goursat 氏所發見者 (1908 年二月 17 日)

$$u(\xi)=f(\xi)+\int_a^b K(\xi,\xi_1)u(\xi_1)\,d\xi_1$$

以 $k(x, y)$ 乘此式,而求其積分,則得

$$\int_a^b k(x,\xi)u(\xi)d\,\xi$$

$$=\int_a^b k(x,\xi)f(\xi)\,d\xi+\int_a^b\int_a^b k(x,\xi)K(\xi,\xi_1)u(\xi_1)\,d\xi_1\,d\xi \qquad (11)$$

若換積分之次序;再應用(9)式,則(11)右邊之第二項變爲

$$\int_a^b [K(x,\xi)+k(x,\xi)]u(\xi)\,d\xi$$

此式中之第二部分與(11)之左邊相消,而此式之第一部分可由(10)得其值.由是(11)可變爲

$$u(x)=f(x)-\int_a^b k(x,\xi)f(\xi)\,d\xi \qquad (12)$$

從此可知在上所假定之條件之下,(10)之連續解不能多於一個.如有,必能從(12)求得之.

欲證(12)所定之 $u(x)$ 確爲(10)之一解,可將(12)寫作

$$f(x)=u(x)+\int_a^b k(x,\xi)f(\xi)\,d\xi.$$

此可作爲定 $f(x)$ 之積分方程式,因 K 爲 k 之逆,可知此方程式滿足「前在(10)上所假定之一切條件」.故從上所證明者,可知其連續解 $f(x)$ 可由公式

$$f(x)=u(x)-\int_a^b K(x,\xi)u(\xi)\,d\xi.$$

得之.

但此式正是(10)式,故(10)式爲「(12)所表之 $u(x)$」所滿足.故已證明下定理1.

定理1. 若(1)$K(x,\xi)$在S中爲有限,及如有不連續點,則其不連續點在S中規則分佈;(2)$f(x)$在I中爲連續;(3)$K(x,y)$有一逆函數$k(x,y)$;則方程式(10)有(及只有)一連續解,而此解可從(12)得之.

上已知必級數(5)爲匀斂,則K方有逆函數.雖以後在9款(定理5,6)中可知對於一逆函數之存在,此非必要之條件.但決定在某種情形之下,此條件可以滿足,亦頗有味.

定理2* 若(1)$K(x,y)$在S中爲有限及如有不連續點,則其不連續點在S中規則分佈;(2)M爲$|K(x,y)|$在S中之上限及

$$|M(b-a)<1|,$$

則$K(x,y)$必有一「級數(5)所表之逆函數」.

證. 因在此諸條件下,從(2)可知

$$|K_i(x,y)|\leqq M^i(b-a)^{i-1}$$

由是則

$$M(b-a)<1$$

時,(5)必爲絕對收斂及均匀收斂明矣.

定理3. 若(1) $K(x,y)$在S中爲有限及如有不連續點,則

* 尙有更進一步之定理,見12款定理5.

其不連續點,必在 S 中規則分佈; (2) $y>x$ 時, $K(x,y)=0$; 則 $K(x,y)$ 必有一「級數(5)所表之逆函數」

證 此可用公式(4), 從(4)易知

$$|K_i(x,y)|\leqq\frac{M^i(x-y)^{i-1}}{(i-1)!}\quad(y<x)$$

故(5)之公項之絕對值不大於

$$\frac{M^i(b-a)^{i-1}}{(i-1)!}$$

因以此爲公項之正項級數爲收斂,故(5)必爲絕對收斂及均勻收斂.

在此兩種情形中之任意一種之下,卽凡級數(5)爲勻斂之時,解(12)可寫作

$$u(x)=f(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b K_n(x,\xi)f(\xi)d\xi \tag{12'}$$

若此式中之層疊函數 K_n 以(2)之形式表之,則只須換積分之次序,卽能以此式變爲「以逐次代入法所得之5款中之級數」[卽此(12)′之右可變爲5款之(3)]. 由是得5款定理1, 2之一新證. 反是,凡本款之結果(在5款定理條件之下者), 亦可從5款定理推得之.

再證下之定理,以結本款:

定理4. 一函數 $K(x,y)$ 不能有不同之兩逆 $k_1(x,y)$ 及 $k_2(x,y)$

證. 倘有此不同之兩逆 k_1, k_2, 則上已知 $K+k_1$ 及 $K+k_2$ 皆

爲連續,由是此二者之差

$$\sigma(x, y)=k_1(x, y)-k_2(x, y)$$

亦必爲連續.

在 (9) 式中先令 $k=k_1$, 再令 $k=k_2$ 而以其兩結果相減, 則得

$$\sigma(x, y)=\int_a^b K(x, \xi)\sigma(\xi, y)d\xi. \tag{13}$$

此可作爲決定 σ 之第二種齊次積分方程式,其 y 可作爲一參數.因從假設,K 有一逆函數,定理 1 之各條件皆已滿足,此 (13) 只有一連續解而此解一望而知其爲 $\sigma=0$. 如是 $k_1=k_2$, 而 K 有不同兩逆之假定爲不可能.

7. 無限個變數之線代數方式程 (linear algebraic equation)

今述一積分方程式論.及代數方程式論間之非常重要之關係.此種關係似乎 Volterra 氏首先注意,渠曾言* 第一種積分方程式可視作「n 個變數之 n 個線代數方程式系 (systemofn linear algebraic equation)」在 $n\to\infty$ 時之極限形式.至第二種積分方程式之亦能如此,渠雖未曾明言;而從其上所云云,自可推知.

至知如何利用此種觀察而竟能由線代數方程式系之解得到第二種積分方程式之解.乃 Fredholm 氏之偉業,其所論之廣博,亦遂因此而能為以前所未有†. Fredholm 氏以此法為補助方法,先發見若干事實再發見證明此類事實之法.嗣 Hilbert‡ 曾示此理論可始終以 Volterra 及 Fredholm 兩

---

* Torino I.

† Dirichlet 問題之新解法可參看 Öfversigt of Kongl. Vetenskaps-Akademiens, Förhandlingar, vol. 57(1900), p. 39, 此爲在 Stockholm 之瑞典學會也.又一本身更完備,且範圍更廣之論文見 Acta, math. vol. 27, (1903), p. 365.

‡ Göttinger Nachrichten, 1904, p. 49. 諸論文之對此理論有重要貢獻者,此爲第一.由代數明題之極限情形(變數之個數增至無限時)而推得此諸結果之計畫遂得成功.

氏之極限法嚴密證明之.本款但就 Fredholm 氏之補助工作言之.至其證明之法,俟次款再論.故就邏輯上(logical)之見地嚴格論之,本款儘可删去.

設在 (a, b) 節中,插入

$$x_1=a+\delta,\ x_2=a+2\delta,\ \cdots\ x_n=a+n\delta=b \qquad \left(\delta=\frac{b-a}{n}\right).$$

諸點,將 (a, b) 節分為 n 個相等部分.

若積分方程式

$$u(x)=f(x)+\int_a^b K(x,\xi)u(\xi)d\xi \tag{1}$$

中之定積分以和代之(定積分本為和之極限,此和即其未達於極限時之和),而成方程式

$$u(x)=f(x)+\sum_{j=1}^{n} K(x,x_j)u(x_j)\delta \tag{2}$$

稍後,可知此方程式大抵有(及只有)一解;今作為此有一解,以 $u_n(x)$ 表之,并希望 $n\to\infty$ 時,$u_n(x)$ 之極限為(1)之解.

因凡 x 之值在 (a, b) 節中時,(2)式必能成立,故其特例,$x=x_1, x_2, \cdots, x_n$ 時,(2)式亦必成立.由是得一方程式系.

$$-\sum_{j=1}^{n} K(x_i,x_j)u_n(x_j)\delta+u_n(x_i)=f(x_i) \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{3}$$

此可作為決定 n 個未知函數 $u_n(x_1), u_n(x_2), \cdots, u_n(x_n)$ 之 n 個非齊次線代數方程式,當此 n 個未知函數已經決定之後,即可以之代入之(2)右邊而得 $u_n(x)$ 之值.故若方程式系(3)之行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} -\delta K(x_1, x_1)+1 & -\delta K(x_1, x_2) & \cdots & -\delta K(x_1, x_n) \\ -\delta K(x_2, x_1) & -\delta K(x_2, x_2)+1 & \cdots & -\delta K(x_2, x_n) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ -\delta K(x_n, x_1) & -\delta K(x_n, x_2) & \cdots\cdots & -\delta K(x_n, x_n)+1 \end{vmatrix}$$

不爲 0, 卽可斷言 (2) 有 (及只有) 一解 (前雖假定今已確知). 實則若所求者, 非 $u_n(x)$ 之本身, 而但爲其在 $n\to\infty$ 時之極限, 則無須討論 (2) 式; 蓋此極限 (假定其爲連續) 完全可由 (3) 所得 $u_n(x_i)$ 之值決定也.

此行列式可展爲下之形式:

$$D_n = 1 - \sum_{i=1}^{n} \delta K(x_i, x_i) + \frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{n} \delta^2 \begin{vmatrix} K(x_i, x_i) & K(x_i, x_j) \\ K(x_j, x_i) & K(x_j, x_j) \end{vmatrix}$$

$$-\frac{1}{3!}\sum_{i,j,k=1}^{n} \delta^3 \begin{vmatrix} K(x_i, x_i) & K(x_i, x_j) & K(x_i, x_k) \\ K(x_j, x_i) & K(x_j, x_j) & K(x_j, x_k) \\ K(x_k, x_i) & K(x_k, x_j) & K(x_k, x_k) \end{vmatrix}.$$

$$+ \cdots + (-1)^n \delta^n \begin{vmatrix} K(x_1, x_1) & \cdots & K(x_1, x_n) \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ K(x_n, x_1) & \cdots & K(x_n, x_n) \end{vmatrix}^{*}$$

若令 n 之值逐漸大至無限, 則此式中之項亦逐漸多至無限, 而各項之本身, 亦逐漸變動而各趨至有定之極限. 由是

* D_n 右各項係數之分母 2!, 3!, 4!, … 等極爲重要. 此因其右旁 Σ 中之各項皆有重複之故, 其重複之次數, 卽 Σ 左分母所表之數. 爲便利計, 變更末項之記號, 故末項無此種分母.

可就無限級數

$$D=1-\int_a^b K(\xi_1,\xi_1)d\xi_1+\frac{1}{2!}\int_a^b\int_a^b\begin{vmatrix}K(\xi_1,\xi_1) & K(\xi_1,\xi_2)\\ K(\xi_2,\xi_1) & K(\xi_2,\xi_2)\end{vmatrix}d\xi_1\,d\xi_2-\cdots$$

考究之.

次款當證明此級數爲收歛.其値 Fredholm 氏謂之 (1) 之行列式,或核 K 之行列式.至此級數爲「$n\to\infty$ 時,D_n 之極限」,不再證明以節篇幅,雖以上引出此級數之法,已能使此似頗合理,但仍須證明,法見下註).†

設再考與 ν 列 (row) μ 行 (column) 相應之 D_n 之餘因數 (cofactor).當 $\mu\neq\nu$ 時,此餘因數行列式可寫作

$$D_n(x_\mu,x_\nu)=\delta\left\{K(x_\mu,x_\nu)-\sum_{i=1}^{n}\delta\begin{vmatrix}K(x_\mu,x_\nu) & K(x_\mu,x_i)\\ K(x_i,x_\nu) & K(x_i,x_i)\end{vmatrix}\right.$$

$$+\frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{n}\delta^2\begin{vmatrix}K(x_\mu,x_\nu) & K(x_\mu,x_i) & K(x_\mu,x_j)\\ K(x_i,x_\nu) & K(x_i,x_i) & K(x_i,x_j)\\ K(x_j,x_\nu) & K(x_j,x_i) & K(x_j,x_j)\end{vmatrix}$$

$$-\cdots+\frac{(-1)^{n-2}}{(n-2)!}\Sigma\,\delta^{n-2}\begin{vmatrix}(n-1)\text{ 列之}\\ \text{行列式}\end{vmatrix}.$$

若令 n 逐漸大至無限,則同時 μ,ν 隨之而變,以至 $\lim(x_\mu,x_\nu)=(x,y)$,因此可以級數

† 此處所須之證法,與初等解析中以二項定理證明「$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ 之展開式 (m 爲正整數) 在 $m\to\infty$ 時爲 e 之級數」相類.此類證明及與之有相類性質之許多證明,依 Osgood 氏普通定理證之極易. Osgood 之普通定理,見 Annals of Math. ser. 2. vol. 3(1902)p. 138, Ex 8

$$D(x,y)=K(x,y)-\int_a^b\begin{vmatrix}K(x,\ y) & K(x,\ \xi_1)\\ K(\xi_1,y) & K(\xi_1,\xi_1)\end{vmatrix}d\xi_1$$

$$+\frac{1}{2!}\int_a^b\int_a^b\begin{vmatrix}K(x,\ y) & K(x,\ \xi_1) & K(x,\ \xi_2)\\ K(\xi_1,y) & K(\xi_1,\xi_1) & K(\xi_1,\xi_2)\\ K(\xi_2,y) & K(\xi_2,\xi_1) & K(\xi_2,\xi_2)\end{vmatrix}d\xi_1\,d\xi_2-\cdots$$

爲 $\delta^{-1}D_n(x_\mu, x_\nu)$ 之極限.*

此級數之收歛俟下款證明之.此級數謂之核 K 之附屬行列式 (adjoint).†

此宜注意者,與 D_n 之主對角線 (principal diagonal) 上元素 (element) 相應之餘因數不在此內 (因 $\mu \neq \nu$), 至此種「與 D_n 之主對角線上元素相應之餘因數」不過其形式與 D_n 微有不同,至其當 $n\to\infty$ 時之極限,則正與此積分方程式之行列程式 D 相同.

今設 $D_n \neq 0$, 而解方程式系 (3), 則從 Cramer 氏公式,得

$$u_n(x_\mu)=\frac{f(x_1)D_n(x_\mu, x_1)+f(x_2)D_n(x_\mu, x_2)+\cdots+f(x_n)D_n(x_\mu, x_n)}{D_n}$$

$$(\mu=1, 2, \cdots, n).$$

若令 $n\to\infty$ 及同時令 μ 變至 x_μ 之極限爲 x, 則因

$$\lim D_n(x_\mu, x_\mu)=D,$$

故此公式之極限形式爲

* 此自須證明參觀上頁之註.

† Fredholm 氏謂之第一子式.

$$u(x)=f(x)+\frac{1}{D}\int_a^b f(\xi)D(x,\xi)d\xi$$

此確爲積分方程式 (3) 之解,乃 Fredholm 氏所求得者.

今暫不將推得此解之步驟層層校正,而置此解於穩固基礎之上;俟次款起,再照 Fredholm 氏之法詳細證明之.若再注意解方程式系 (3) 之 Cramer 氏公式如何成立,即可知以上所用之方法. Cramer 氏公式之來源,爲以諸餘因數 $D_n(x_\mu, x_i)$ 乘 (3) 中諸方程式而加之,其主要之點爲消去 $u_n(x_\mu)$ 以外之諸未知函數.其理由則在「D_n 之第 μ 行元素,以與他一行元素相應之諸餘因數乘之,再以其結果相加,則其和爲 0」之定理.此定理可以公式

$$-\delta\sum_{i=1}^{n}K(x_i, x_\mu)D_n(x_\lambda, x_i)+D_n(x_\lambda, x_\mu)=0 \qquad (\lambda\neq\mu)$$

表之.

若此式以 $-\delta$ 除之,再令 $n\to\infty$, 并同時令 x_λ, x_μ 趨至 x, y 之值,則得

$$\int_a^b K(\xi, y)D(x,\xi)d\xi+K(x,y)D-D(x,y)=0 \qquad (4)$$

爲此公式(以 $-\delta$ 除後)之極限形式.

由此,可知 (4) 爲次款解積分方程式 (1) 之基本工具.故必先將此公式證實,而其證法必須比所已言者,更爲確當而後可.

在此公式外,尚有一相類之公式,* 其來源由於「D_n 之第 ν 列上之元素以與他一列元素相應之餘因數乘之,再以其結果相加,則其和爲 0」之定理,此定理可以公式

$$-\delta\sum_{i=1}^{n}K(x_\nu, x_i)D_n(x_i, x_\lambda)+D_n(x_\nu, x_\lambda)=0$$

表之. 再如前求其極限,可得第二個基本公式,即

$$\int_a^b K(x, \xi)D(\xi, y)d\xi+K(x, y)D-D(x, y)=0 \tag{5}$$

* 此公式(及與之相等者)爲證明「Cramer 氏公式適用於線方程式系」所必須之項.

8. Fredholm 氏解法

先證明 Hadamard 氏關於行列式之定理,* 以爲下之預備.爲達此目的起見.先以幾何上之簡單事實明之.

若一平行六面體(Parallelopiped)之一角點(Vertex)爲原點,其鄰接三角點爲 (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3),則此平行六面體之體積爲

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

設其從原點起之三邊之長爲1,則

$$x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 = 1 \qquad (i = 1, 2, 3) \qquad (1)$$

從幾何上可知此三邊互相垂直時,此六面體之體積爲極大,而其值爲 1 故在(1)之三條件之下,必 $|\Delta| \leqq 1$, 從此暗示推廣之,得下之預備定理:

---

* Bull. des sciences math, et astr. 2nd ser. vol. 17(1893), p. 240. Hadamard 之方法,純爲代數法. 以下所用之法爲 Wirtinger 氏之法, Monatshefte f. Math. u. Physik. vol. 18(1907), p. 158. 此兩作者皆討論更廣之問題,其特例卽行列式之元爲虛數時之情形. 再參觀 Fischer, Archiv d, Math. u. Phys. 3 ser., vol. 13, (1908), p. 32.

預備定理. 若行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

之元素皆爲實數及皆能滿足

$$a_{i1}^2+a_{i2}^2+\cdots+a_{in}^2=1 \qquad (i=1, 2, \cdots n) \tag{2}$$

則 $$|\Delta|\leqq 1.$$

證. 欲證此理,先在(2)之諸條件下,試求Δ之極大極小.

因(2)之諸條件限 n^2 度空間之點 $(a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{nn})$ 於一閉區域(closed region)之中,及Δ爲此諸自變數(argument)之連續函數;故在(2)之諸條件下,Δ必有有限之極大及有限之極小.又因Δ關於此諸自變數有連續之一階諸偏導式,故可用微積分中求極大極小之尋常方法.設

$$a_{i1}, a_{i2}, \cdots a_{in}$$

變,而其餘諸 a 爲常數,則從(2)得

$$a_{i1}\,da_{i1}+a_{i2}\,da_{i2}+\cdots+a_{in}\,da_{in}=0, \tag{3}$$

因 $\partial\Delta/\partial a_{ij}$ 爲Δ中 a_{ij} 之餘因數 A_{ij},故Δ有極大或極小之必要條件爲

$$A_{i1}\,da_{i1}+A_{i2}\,da_{i2}+\cdots+A_{in}\,da_{in}=0. \tag{4}$$

又因Δ爲極大或極小時,能滿足(3)之各組微分 $da_{i1}, da_{i2}, \cdots da_{in}$ 亦必能滿足(4).故(3)及(4)左邊之係數必互成比例,而得

$$A_{ij}=\lambda_i a_{ij} \qquad (i, j=1, 2, \cdots, n).$$

以 a_{ij} 乘此諸式而加之,并用(2)式,得

$$\Delta=\lambda_{ij}.$$

而因此*

$$A_{ij}=\Delta a_{ij} \qquad (i, j=1, 2, \cdots n) \qquad (5)$$

從著名定理,可知'以 A_{ij} 爲公元素 (general element) 之 n 階行列式之值爲 Δ^{n-1}. 故以(5)中 A_{ij} 之諸值作此種行列式,則得

$$\Delta^{n-1}=\Delta^{n+1}.$$

由是 Δ 爲極大或極小時,

$$\Delta=\pm 1.$$

故 Δ 之極大值爲 1, 極小值爲 -1; 而此預備定理已經證明.

今從此再推出一更廣之定理如下: 設 Δ 之元素仍皆爲實數,但不必再滿足(2)之條件. 設(2)之左邊之值以 σ_i 表之. 若 Δ 之各列中元素不全爲 0 [暫時假定其如此], 則此諸 σ_i 皆爲正,而可就下行列式考之:

$$\frac{\Delta}{\sqrt{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n}}=\begin{vmatrix} \frac{a_{11}}{\sqrt{\sigma_1}} & \cdots & \frac{a_{1n}}{\sqrt{\sigma_1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{a_{n1}}{\sqrt{\sigma_n}} & \cdots & \frac{a_{nn}}{\sqrt{\sigma_n}} \end{vmatrix}$$

此行列式能滿足上預備定理中之一切條件,故可得下之不等式:

$$|\Delta| \leqq \sqrt{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n}.$$

*注意: 若 $\Delta\neq 0$, 則此爲「Δ 爲垂直行列式」之條件.

再設 M 為一正常數,其大能使一切 $|a_{ij}|$ 皆不比其大,則得

$$\sigma_i \leqq n M^2.$$

而由是得下之公式:

$$|\Delta| \leqq \sqrt{n^n} M^n.$$

Δ 中某列中元素皆為0時(上曾除去此種情形),此不等式仍顯然成立;而下之定理已經證明:

HADAMARD 氏定理. 若行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

之元素 a_{ij} 皆為實數及皆能滿足不等式

$$|a_{ij}| \leqq M,$$

則

$$|\Delta| \leqq \sqrt{n^n} M^n.$$

今可進論下積分方程式(6)之 Fredholm 氏之解決

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x, \xi) u(\xi) d\xi \tag{6}$$

此中假定* (一) $K(x, \xi)$ 在 S 中為有限及如有不連續點時,其不連續點在 S 中規則分佈,(二) $f(x)$ 在 I 中為連續;(三) $K(x, x)$ 在 I 中為可積.

* K 不常為有限時之情形,本書不加討論.但此種情形在實用上亦有重要之處.讀者如欲知此,可視 Fredholm 氏, Hilbert 氏及 E. Schmidt 氏討論此事之論文.

作兩級數

$$D=1-\int_a^b K(\xi_1,\xi_1)d\xi_1+\frac{1}{2!}\int_a^b\int_a^b\begin{vmatrix}K(\xi_1,\xi_1) & K(\xi_1,\xi_2)\\ K(\xi_2,\xi_1) & K(\xi_2,\xi_2)\end{vmatrix}d\xi_1\,d\xi_2$$

$$-\frac{1}{3!}\int_a^b\int_a^b\int_a^b\begin{vmatrix}K(\xi_1,\xi_1) & K(\xi_1,\xi_2) & K(\xi_1,\xi_3)\\ K(\xi_2,\xi_1) & K(\xi_2,\xi_2) & K(\xi_2,\xi_3)\\ K(\xi_3,\xi_1) & K(\xi_3,\xi_2) & K(\xi_3,\xi_3)\end{vmatrix}d\xi_1\,d\xi_2\,d\xi_3+\cdots \tag{7}$$

$$D(x,y)=K(x,y)-\int_a^b\begin{vmatrix}K(x,y) & K(x,\xi_1)\\ K(\xi_1,y) & K(\xi_1,\xi_1)\end{vmatrix}d\xi_1$$

$$+\frac{1}{2!}\int_a^b\int_a^b\begin{vmatrix}K(x,y) & K(x,\xi_1) & K(x,\xi_2)\\ K(\xi_1,y) & K(\xi_1,\xi_1) & K(\xi_1,\xi_2)\\ K(\xi_2,y) & K(\xi_2,\xi_1) & K(\xi_2,\xi_2)\end{vmatrix}d\xi_1\,d\xi_2-\cdots \tag{8}$$

此二級數中之重積分皆顯爲收歛,及可按任意次序之層疊積分求其值.

於是可先證此兩級數爲絕對收歛,再證此第二級數爲均勻收歛於下.前款已說明此 D 爲常數,謂之 K 之行列式;函數 $D(x,y)$ 謂之 K 之附屬行列式*.

設 M 爲 $|K(x,y)|$ 在 S 中之上限,則(7)中各行列式皆能滿足 Hadamard 氏定理中諸條件,及(7)之公項.

*嚴格言之,應云關於 S 區域之行列式及附屬行列式.因 S 爲此二者定義之範圍,論理此範圍决不可略去;而此仍略去者,因在假設中已經屢言,讀者自知其範圍所在,爲字句簡便計不妨從略耳.

$$\frac{(-1)^n}{n!}\int_a^b \cdots \int_a^b \begin{vmatrix} K(\xi_1, \xi_1) & \cdots & K(\xi_1, \xi_n) \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ K(\xi_n, \xi_1) & \cdots & K(\xi_n, \xi_n) \end{vmatrix} d\xi_1 \cdots d\xi_n$$

之絕對值不大於

$$C_n = \frac{\sqrt{n^n} M^n (b-a)^n}{n!}.$$

因 $n \to \infty$ 時,

$$\frac{C_{n+1}}{C_n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} M(b-a)$$

之極限,顯然爲 0, 故以此 C_n 爲公項之級數必爲收斂.故級數(7)必爲絕對收斂.

同理,(8)之公項其絕對值不大於

$$B_n = \frac{\sqrt{n^n} M^n (b-a)^{n-1}}{(n-1)!};$$

及

$$\frac{B_{n+1}}{B_n} = \frac{\sqrt{n+1}}{n} \sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} M(b-a).$$

因 $n \to \infty$ 時,此第二式之極限爲 0; 故以 B_n 爲公項之級數爲收斂;又因此爲正常數項之級數,此旣收斂;則級數(8)在 S 中必爲絕對收斂及均勻收斂明矣.

附屬行列式之是否連續爲根本上重要之問題*,今討論此問題如下:先以(8)之公項寫作

* 若假定 $K(x, y)$ 在 S 中連續,則因(8)之各項爲連續及(8)之本身爲勻斂,而極易斷定 $D(x, y)$ 在 S 中爲連續.

$$\frac{(-1)^n}{n!}K(x,y)\int_a^b\cdots\int_a^b\begin{vmatrix}K(\xi_1,\xi_1)&\cdots&K(\xi_1,\xi_n)\\\cdots\cdots&\cdots&\cdots\cdots\\\cdots\cdots&\cdots&\cdots\cdots\\K(\xi_n,\xi_1)&\cdots&K(\xi_n,\xi_n)\end{vmatrix}d\xi_1\cdots d\xi_n$$

$$+\frac{(-1)^n}{n!}Q_n(x,y) \quad (9)$$

此式中之 Q_n 爲

$$Q_n(x,y)=\int_a^b\cdots\int_a^b\begin{vmatrix}0&K(x,\xi_1)&\cdots&K(x,\xi_n)\\K(\xi_1,y)&K(\xi_1,\xi_1)&\cdots&K(\xi_1,\xi_n)\\\cdots\cdots&\cdots\cdots&\cdots&\cdots\cdots\\\cdots\cdots&\cdots\cdots&\cdots&\cdots\cdots\\K(\xi_n,y)&K(\xi_n,\xi_1)&\cdots&K(\xi_n,\xi_n)\end{vmatrix}d\xi_1\cdots d\xi_n \quad (10)$$

因 (9) 之第一項爲 (7) 之公項及 $K(x,y)$ 之相乘積,故 (8) 可寫作

$$D(x,y)=D\cdot K(x,y)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}Q_n(x,y). \quad (11)$$

若 (10) 中之行列式,依其第一列之元素展開之,則得

$$Q_n=\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\int_a^b\cdots\int_a^b P_{ni}K(x,\xi_i)d\xi_1\cdots d\xi_n \quad (12)$$

此式中之 P_{ni} 爲

$$P_{ni}=\begin{vmatrix}K(\xi_1,y)&\cdots&K(\xi_1,\xi_{i-1})&K(\xi_1,\xi_{i+1})&\cdots&K(\xi_1,\xi_n)\\\cdots\cdots&\cdots&\cdots\cdots&\cdots\cdots&\cdots&\cdots\cdots\\\cdots\cdots&\cdots&\cdots\cdots&\cdots\cdots&\cdots&\cdots\cdots\\K(\xi_n,y)&\cdots&K(\xi_n,\xi_{i-1})&K(\xi_n,\xi_{i+1})&\cdots&K(\xi_n,\xi_n)\end{vmatrix}.$$

設改變積分中變數之記號,在 (12) 之第 i 個積分中,改 ξ_i 爲 ξ, 改 ξ_{i+1} 爲 ξ_i, 改 ξ_{i+2} 爲 ξ_{i+1} ⋯, 而 $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_{i-1}$ 則皆照舊.

於是再在此第 i 個積分之行列式中,以第 i 列移至第一列,則可知 (12) 中一切項皆相等,而可將 (12) 寫作

$$Q_n(x, y) = -n\int_a^b \cdots \int_a^b K(x, \xi) P_n \, d\xi \, d\xi_1 \cdots d\xi_{n-1}, \tag{13}$$

此式中之 P_n 為

$$P_n = \begin{vmatrix} K(\xi, y) & K(\xi, \xi_1) & \cdots & K(\xi, \xi_{n-1}) \\ K(\xi_1, y) & K(\xi_1, \xi_1) & \cdots & K(\xi_1, \xi_{n-1}) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ K(\xi_{n-1}, y) & K(\xi_{n-1}, \xi_1) & \cdots & K(\xi_{n-1}, \xi_{n-1}) \end{vmatrix}.$$

今可直接討論 $D(x, y)$ 之連續矣. 先證 (10) 所定之 $Q_n(x, y)$ 在 S 中連續如下. 由 (10) 或 (13) 及 1 款定理 1, 可知 $Q_1(x, y)$ 在 S 中為連續. 再設 $Q_1, \cdots Q_{n-1}$ 在 S 中為連續,若能從此假定而推知 Q_n 亦在 S 中為連續, 則從數學歸納法 (mathematical induction) 已完全證明一切 Q 在 S 中為連續. (13) 之左邊可寫作下之形式:

$$-n\int_a^b \cdots \int_a^b K(x, \xi) K(\xi, y) \begin{vmatrix} K(\xi_1, \xi_1) & \cdots & K(\xi_1, \xi_{n-1}) \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ K(\xi_{n-1}, \xi_1) & \cdots & K(\xi_{n-1}, \xi_{n-1}) \end{vmatrix} d\xi \cdots d\xi_{n-1}$$

$$-n\int_a^b \cdots \int_a^b K(x, \xi) \begin{vmatrix} 0 & K(\xi, \xi_1) & \cdots & K(\xi, \xi_{n-1}) \\ K(\xi_1, y) & K(\xi_1, \xi_1) & \cdots & K(\xi_1, \xi_{n-1}) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ K(\xi_{n-1}, y) & K(\xi_{n-1}, \xi_1) & \cdots & K(\xi_{n-1}, \xi_{n-1}) \end{vmatrix} d\xi \cdots d\xi_{n-1}.$$

此第一積分但爲

$$\int_a^b K(x,\xi)K(\xi,y)\,d\xi$$

之常數倍數,從 1 款定理 1 可知其在 S 中爲連續.此第二積分可寫作

$$-n\int_a^b K(x,\xi)Q_{n-1}(\xi,y)\,d\xi,$$

故從同理亦可知其在 S 中爲連續[因已假定 Q_{n-1} 在 S 中連續].由是已證明 Q_n 在 S 中爲連續.而從數學歸納法知一切 Q 無不在 S 中爲連續矣.

既知一切 Q 爲連續,即可推知 (11) 中之級數所代表之函數亦必在 S 中爲連續.因此級數爲勻斂級數 (8) 及「級數 (7) 與有限函數 $K(x,y)$ 之積」之差,而此級數亦必在 S 中勻斂也.由是 $D(x,y)$ 在 S 中爲有限及連續與不連續之情形,皆可從 (11) 推知矣.

今可證明 $K(x,y)$, $D(x,y)$, D 三者連合之恆等式矣.若以 (13) 所表之 Q_n 代入 (11) 中級數之內,則其結果與「以 $K(x,\xi)$ 乘 $D(\xi,y)$ 再分項求其積分之結果」相同.因 (8) 爲勻斂及其全體與各項皆爲可積,故可行上言之分項求積法而得公式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}Q_n(x,y)=\int_a^b K(x,\xi)D(\xi,y)\,d\xi \tag{14}$$

若以 (10) 中之行列式依其第一行之元素展開之,而行同上之法,得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}Q_n(x, y)=\int_a^b D(x, \xi)K(\xi, y)\,d\xi. \tag{15}$$

以(14),(15),(11)連合,得下之基本公式:

$$D(x, y)-D\cdot K(x, y)=\int_a^b K(x, \xi)D(\xi, y)\,d\xi$$

$$=\int_a^b D(x, \xi)K(\xi, y)\,d\xi, \tag{16}$$

此與前款未經嚴密證明之(4),(5)兩式相同.

以上已證明下之定理:

定理1. 凡函數 $K(x, y)$ 若(一)在 S 中爲有限,(二)如有不連續點,則所有不連續點在 S 中規則分佈,(三) $K(x, x)$ 在 I 中爲可積;則此函數 $K(x, y)$ 有一「絕對收斂級數(7)所表之行列式 D」,及有一「絕對收斂并均匀收斂之級數(8)所表之附屬行列式 $D(x, y)$」,此附屬行列式 $D(x, y)$ 在 S 中爲有限;及如有不連續點,則其不連續點必爲 K 之不連續點*. 此函數 K 及其行列式與附屬行列式能滿足恆等式(16).

若 $D\neq 0$, 則(16)可以 $-D$ 除之,及若命

$$k(x, y)=-\frac{D(x, y)}{D} \tag{17}$$

則(16)化爲6款之公式(9).

定理2. 凡函數 $K(x, y)$ 若(一)在 S 中爲有限,(二)如有不

---

* 若 $D=0$, 則 $D(x, y)$ 在 S 中連續. 若 $D\neq 0$, 則凡 $K(x, y)$ 之不連續,即 $D(x, y)$ 之不連續,而其不連續之情形爲能使 $D(x, y)-D\cdot K(x, y)$ 爲連續.

連續點,則不連續點在 S 中爲規則分佈,(三) $K(x,x)$ 在 I 中爲可積,(四) $K(x,y)$ 之行列式不等於 0; 則 $K(x,y)$ 有一逆,而此逆可從 (17) 求得.

再從 6 款定理 1, 可得進一步之結果:

定理 3. 若 (一) 方程式 (6) 之核 $K(x,y)$ 在 S 中爲有限, (二) $K(x,y)$ 如有不連續點,則其不連續點若 S 中規則分佈, (三) $K(x,x)$ 在 I 中爲可積, (四) $K(x,y)$ 之行列式不等於 0, (五) $f(x)$ 在 I 中連續;則此方程式 (6) 有 (及只有) 一連續解,而此解可從公式

$$u(x)=f(x)+\int_a^b \frac{D(x,\xi)}{D} f(\xi)\,d\xi$$

求得.

欲保證核 $K(x,y)$ 之行列式及附屬行列式存在. 故須假定 $K(x,x)$ 爲可積;因 $K(x,x)$ 如不可積,則不但 (7), (8) 兩級數不能成立,甚至 (7), (8) 之諸項亦無意義也. 但在方程式 (6) 之核上,此種限制實無關重要. 蓋在 $x=y$ 直線上改 K 之定義,於此方程式之解不生影響也. 爲對於一切情形便利計,作下之定義:

定義.* 設 (一) $K(x,y)$ 爲 S 中之有限函數, (二) 此 $K(x,y)$ 如有不連續點,則其不連續點在 S 中規則分佈, (三) 命

* 此定義中之意想,乃 Hilbert 氏用以討論 K 非一定有限時之情形者 (Göttinger Nachrichten 1904, p. 82).

$$K_0(x, y)=\begin{cases}K(x, y) & x \neq y \text{ 時}\\ 0 & x=y \text{ 時}\end{cases}$$

則 $K_0(x, y)$ 之行列式 D_0 及 $D_0(x, y)$ 依次謂之 K 之修改行列式 (modified determinant) 及修改附屬行列式 (modified adjoint).

用此定義得:

定理 4. 若在定理 3 中去 $K(x, x)$ 爲可積之條件, 而 D 及 $D(x, y)$ 以修改行列式及修改附屬行列式代之, 則定理 3 仍能成立.

此宜注意者, 當 K 之行列式及附屬行列式不存在時, 其修改行列式及修改附屬行列式或能存在; 但定理 1 之諸條件能完全存在時, 此四種行列式必全能存在. 此行列式及修改行列式間之關係, 與附屬行列式及修改附屬行列式間之關係, 頗有趣味; 以公式明之如下:

$$D_0=e^c D \tag{18}$$

$$D_0(x, y)=\begin{cases}e^c\ D(x, y) & x \neq y \text{ 時}\\ e^c[D(x, y)-DK(x, y)] & x=y \text{ 時},\end{cases} \tag{19}$$

此中 D 及 $D(x, y)$ 爲 K 之行列式及附屬行列式, D_0 及 $D_0(x, y)$ 爲修改行列式及修改附屬行列式, 及

$$c=\int_a^b K(\xi, \xi)\, d\xi \tag{20}$$

此 (18) 式及 (19) 式之前半部分之證明只須以級數

$$e^{-c}=1-\int_a^b K(\xi, \xi)\, d\xi+\frac{1}{2!}\left(\int_a^b K(\xi, \xi)\, d\xi\right)^2-\cdots,$$

乘 D_0 或 $D_0(x, y)$ 自知;而(19)式之後半部分可以同法證明之,或由(16),(18)之連合及(19)之前半部分推得之,其詳細證明讀者可自爲之.*

凡 Liouville 及 Volterra 兩氏所考之積分方程式,其積分上限爲變數者,在上之末一定理中亦成立.此就「$y>x$ 時,$K(x, y)=0$」設想,卽可明白.又如此則 $D_0=1$,及關於 $D_0(x, y)$ 之級數(8)變爲 6 款之(5),亦不難知;故在此種情形之下,上得之解亦變爲 Volterra 氏之解明矣.

今再言 $D=0$ 時之情形以結本款.若(6)有一連續解 $u(x)$,則

$$u(\xi)=f(\xi)+\int_a^b K(\xi, \xi_1)u(\xi_1)\,d\xi_1$$

以 $D(x, \xi)$ 乘此式及從 a 至 b 就 ξ 求其結果之積分,再按(16)化簡之,則得

定理 5.† 若積分方程式(6)之行列式爲 0,而定理 3 之其他條件皆能滿足,則此(6)有「在 I 中連續之解」之必要條件爲

* 讀者又可自證:若(1) $K(x, y)$ 在 S 中爲有限,(二) $K(x, y)$ 如有不連續點,則其不連續點在 S 中規則分佈,(三) $K(x, y)$ 之修改行列式 $D_0\neq 0$,則 K 有一逆,而此逆可以

$$k(x, y)=\begin{cases}-\dfrac{D_0(x, y)}{D_0} & (x\neq y)\\ -\dfrac{D_0(x, y)}{D_0}-K(x, y) & (x=y)\end{cases}$$

表之.

† 此定理與以下云云相應:若一組線方程式之行列式不爲 0,則此組方程式大抵爲無解.

$$\int_a^b D(x, \xi) f(\xi)\, d\xi = 0$$

在 $D(x, y) \equiv 0$ 之特例外,當 $D = 0$ 時,(6) 之能否有一連續解,須視 $f(x)$ 之情形而定.

又若在定理 5 中去 $K(x, x)$ 爲可積之條件,而 $K(x, y)$ 之行列式及附屬行列式,以其修改行列式及修改附屬行列式代之,則定理 5 仍能成立.

9 有一參數之積分方程式

凡第二種積分方程式其核中有一參數 λ 者,在許多地方頗爲重要.其特例,此參數 λ 但爲 $K(x, y)$ 之一個因數者,尤爲重要,其方程式可寫作

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x, \xi)u(\xi)d\xi^{\dagger} \tag{1}$$

習慣上仍謂 K 爲此方程式之核.但爲一致起見,應稱 λK 爲核.故以下不從習慣,逕名 λK 爲核.

本款假定 $f(x)$ 在 I 中連續;K 在 S 中爲有限及 K 所有之不連續點爲規則分佈;及 $K(x, x)$ 在 I‡ 中爲可積.並假定函數 f 及 K 皆爲實,而參數 λ 則可爲實可爲複素(complex).如是核 λK 不再一定爲實.從 5 款第二附註,可知此於該款及其下一款中所言之理,皆不生影響;以 λK 代 K 後,其主要結果如下:

---

† 此在 $\lambda=1/\rho$ 時,卽爲 4 款 (5) 式所示之 Liouville 氏方程式.

‡ 此 $K(x, x)$ 在 I 爲可積之條件,在下定理 1 及 2 中可以無須.在以下之他定理中,亦可用修改之行列式及附屬式避免之.§ 在下定理 1, 2 之證明中,K 無須一定爲實,極易明白.至下之其他定理亦只須用 Hadamard 氏定理之推廣形式(卽關於元素爲複素數之行列式者)卽可知 K 不必一定爲實.

定理1. 若 $K_1, K_2 \cdots$ 爲由 K 所得之層疊函數,則凡 λ 之值能使級數

$$k(x, y; \lambda) = -\lambda K_1(x, y) - \lambda^2 K_2(x, y) - \cdots \tag{2}$$

在 S 中關於 (x, y) 爲勻歛者,亦必能使 $k(x, y; \lambda)$ 爲 $\lambda K(x, y)$ 之逆函數;又對於此種 λ 之值,方程式 (1) 有(及只有)一連續解,而此解即爲

$$u(x) = f(x) - \int_a^b k(x, \xi; \lambda) f(\xi) d\xi. \tag{3}$$

又若 λ 爲實,則此解亦必爲實明矣.

定理2. 若 M 爲 $|K(x, y)|$ 在 S 中之上限,則

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)} \tag{4}$$

時定理 1 之假設卽可滿足[卽 λ 合於(4)時(2)能在 S 中關於 (x, y) 爲勻歛].

又若 $y > x$ 時,

$$K(x, y) = 0 \tag{5}$$

則不論 λ 爲何數定理 1 之假設皆能滿足.

再從 8 款,可得下之定理:

定理3. 無論 λ 爲何數,兩級數

$$D(\lambda) = 1 - \lambda \int_a^b K(\xi_1, \xi_1)\, d\xi_1 + \frac{\lambda^2}{2!} \int_a^b \int_a^b \begin{vmatrix} K(\xi_1, \xi_1) & K(\xi_1, \xi_2) \\ K(\xi_2, \xi_1) & K(\xi_2, \xi_2) \end{vmatrix} d\xi_1\, d\xi_2 - \cdots \tag{6}$$

$$D(x,y;\lambda)=\lambda K(x,y)-\lambda^2\int_a^b\begin{vmatrix}K(x,y) & K(x,\xi_1)\\ K(\xi_1,y) & K(\xi_1,\xi_1)\end{vmatrix}d\xi_1$$

$$+\frac{\lambda^3}{2!}\int_a^b\int_a^b\begin{vmatrix}K(x,y) & K(x,\xi_1) & K(x,\xi_2)\\ K(\xi_1,y) & K(\xi_1,\xi_1) & K(\xi_1,\xi_2)\\ K(\xi_2,y) & K(\xi_2,\xi_1) & K(\xi_2,\xi_2)\end{vmatrix}d\xi_1 d\xi_2-\cdots \qquad (7)$$

皆爲收斂;又凡 (x,y) 在 S 中及 λ 之值在任意一有限節中時,此第二級數關於 $(x,y;\lambda)$ 爲勻斂;而此第二級數所表之函數 $D(x,y;\lambda)$ 爲有限,及除 $K(x,y)$ 之不連續點外無不連續點(即 $D(x,y;\lambda)$ 有不連續點時,至多即是 $K(x,y)$ 之不連續點,此外別無其他之點可爲 $D(x,y;\lambda)$ 之不連續點).

此 $K(x,y)$, $D(\lambda)$, $D(x,y;\lambda)$ 三函數必能合於下之等式:

$$D(x,y;\lambda)-\lambda D(\lambda)K(x,y)=\lambda\int_a^b K(x,\xi)D(\xi,y;\lambda)\,d\xi$$

$$=\lambda\int_a^b K(\xi,y)D(x,\xi;\lambda)\,d\xi \qquad (8)$$

若 λ 之值以實數爲限,則此定理不過爲 8 款諸結果之特例;即不過在 8 款中改 K 爲 λK 所得之結果而已.至現在新生之特點,爲(7)之收斂前但爲就 (x,y) 爲均勻者今則就 λ 及 (x,y) 皆爲均勻耳.此亦極易明白,因只須先以正常數 μ 爲 λ,再就合於 $|\lambda|\leqq\mu$ 之一列 λ 之值察之,即可知此理爲眞也.[因此 μ 爲有限及 $K(x,y)$ 之性質如 8 款所假定,則以 $\mu K(x,y)$ 爲 8 款之 $K(x,y)$ 時,8 款之(8)仍爲勻斂,故就合於 $|\lambda|\leqq\mu$ 之

一列λ而論,(7)必關於λ及(x, y)爲勻斂].

若λ爲複素數,* 則此定理不能作爲8款之特例,因8款中假定K爲實,令以λK爲K,則核不爲實也.但證此定理,亦復甚易,只須以λK爲K,照8款之方法及步驟,依次推算即可知本定理爲眞.此事甚易,讀者可自爲之.

今不經證明而加一定理於下(讀者可以類於8款之法證實之):

定理4. 以(7)式就λ微分p次(分項微分)所得之級數,當(x, y)在S中及λ在任意有限節中時,關於$(x, y; \lambda)$爲勻斂.此級數所代表之函數

$$\partial^p D(x, y; \lambda)/\partial\lambda^p$$

對於此有限節中之λ爲有限及,其不連續點,但爲K之不連續點[即必K之不連續點始爲此函數之不連續點].

再證實一關於冪級數之預備定理於下,此乃以後極有用處者.

預備定理.† 若冪級數

$$P(x, y; \lambda) = a_0(x, y) + a_1(x, y)\lambda + a_2(x, y)\lambda^2 + \cdots \tag{9}$$

中之各係數$a_i(x, y)$在S中爲有限;及若有一正常數R,能使

---

* 若(Hadamard氏定理之關於「元素爲複素之行列式」者已經證實,此即無須特別討論.

† 此預備定理可推廣至諸a爲任意個變數之函數及S爲任意有限或無限之區域.

$|\lambda|<R$ 時,此級數(9)能在 S 中全爲收斂;又若 (x,y) 在 S 中變動,λ 在圓周 $|\lambda|=r$ 上變動,及 r 爲小於 R 之正常數時,此級數所表之函數 P 爲 $(x,y;\lambda)$ 之有限函數;則若 ρ 爲小於 r 之正常數,此級數(9),當 (x,y) 在 S 中及 $|\lambda|\leqq\rho$ 時,關於 $(x,y;\lambda)$ 爲匀斂.

設 (x,y) 在 S 中及 $|\lambda|=r$ 時,$|P|$ 之上限爲 M. 從關於冪級數之著名定理(參考 Forsyth 氏函數論 p. 36)知

$$M\geqq|a_n|r^n.$$

由是 (x,y) 在 S 中及 $|\lambda|\leqq\rho$ 時,「級數(9)之各項之絕對值(absolute value)」不大於「級數

$$M+M\frac{\rho}{r}+M\left(\frac{\rho}{r}\right)^2+\cdots\cdots$$

之相應項之絕對值」,因此級數爲一正項收斂級數,故級數(9)必匀斂.

$D=0$ 時之特別情形,在 8 款中已經說明,今下一定義如次:

定義: 凡整解析函數(integral analytic function). $D(\lambda)$ 之根,以後逕謂之函數 $K(x,y)$ 之根* [詳言之此應曰關於 $K(x,y)$ 之 $D(\lambda)$ 之根,至少亦應謂之關於 $K(x,y)$ 之根;今逕名之曰

*脩改行列式之根皆與 $D(\lambda)$ 之根同,參觀 8 款之公式(18). 故可以 $D_0(\lambda)$ 之根爲 $K(x,y)$ 之 D 根. 若 $K(x,x)$ 在 I 中不可積,則可以 $D_0(\lambda)$ 之根爲 $K(x,y)$ 之 D 根之定義.

$K(x,y)$ 之根 似極不通,而用之者爲便利計耳.至明明爲 $D(\lambda)$ 之根,何必謂之 $K(x,y)$ 之根,因 $K(x,y)$ 爲方程式之主體,亦爲 $D(\lambda)$ 之主要元素, $D(\lambda)$ 之性質完全隨 $K(x,y)$ 而變,故以就 $K(x,y)$ 立名較爲便利,但讀者須牢記以後所謂 $K(x,y)$ 之根,並非 $K(x,y)=0$ 之根乃 $D(\lambda)=0$ 之根耳].

前款已言及 $D(\lambda)$ 爲無根之一例,「卽 $y>0$ 時 $K(x,y)=0$」時 $D(\lambda)$ 爲無根是也.又 $D(\lambda)$ 爲有根之簡例,卽 $K(x,y)=1$ 時;因 $K(x,y)=1$ 時,

$$D(\lambda)=1-\lambda(b-a),$$

故 $D(\lambda)$ 在 $K(x,y)=1$ 時有(及只有)一根,而此根卽是 $\lambda=1/(b-a)$. 又有 $D(\lambda)$ 至少必有一根之時.此種情形頗爲重要,俟下11款論之.

由8款定理2之證法可得

定理5. 凡 λ 不爲 $K(x,y)$ 之根時,函數 $\lambda K(x,y)$ 有一逆函數 $k(x,y;\lambda)$, 其公式爲

$$k(x,y;\lambda)=-\frac{D(x,y;\lambda)}{D(\lambda)} \tag{10}$$

由是此逆函數爲 λ 之解析函數.而此解析函數在 λ 平面之有限部分,除凡 $D(\lambda)$ 之根皆爲其極(pole)之外,別無其他異點(singularities).今證 S 中必有 (x,y) 點,能使凡 $D(\lambda)$ 之根爲 k 之極.

欲證此理,先作公式

$$\int_a^b D(\xi,\xi;\lambda)\,d\xi=-\lambda\frac{d\,D(\lambda)}{d\lambda}, \tag{11}$$

此公式之爲眞確,從公式(6),(7)可知.†

設 λ_1 爲所討論之任意根,並設此爲 $D(\lambda)$ 之 m 階之根(root of the mth order),則 $D(\lambda)$ 可寫作

$$D(\lambda)=C_m(\lambda-\lambda_1)^m+C_{m+1}(\lambda-\lambda_1)^{m+1}+\cdots,\ (m>0,\ C_m\neq 0) \qquad (12)$$

而此式對於 λ 之一切値皆合.

又因就 λ 平面中之有限點而論,$D(x,y;\lambda)$ 爲 λ 之解析函數,故 $D(x,y;\lambda)$ 可在 $\lambda=\lambda_1$ 之周圍展爲冪級數,其係數爲 (x,y) 之函數.此級數之前若干係數雖可在 S 中恆等於 0.但其係數決不能全爲恆等於0;因若全等於0,則必須 $K(x,y)\equiv 0$ [此理從(7)可知];而 $K(x,y)\equiv 0$,則必 $D(\lambda)=1$;是則與 $D(\lambda)$ 有 λ_1 爲根之假設相矛盾矣.因此 $D(x,y;\lambda)$ 可寫作

$$D(x,y;\lambda)=g_k(x,y)(\lambda-\lambda_1)^k+g_{k+1}(x,y)(\lambda-\lambda_1)^{k+1}+\cdots \quad (k\geqq 0,\ g_k\neq 0) \qquad (13)$$

此係數 $g_k, g_{k+1}\cdots$ 與「$\lambda=\lambda_1$ 時之關於 λ 之 $D(x,y;\lambda)$ 之逐次微係數(successive derivative)」所差者,不過爲常數因數,故從定理4可知諸 g 在 S 中皆爲有限,而其不連續點只爲 K 之不連續點而已.

從上之預備定理,可知 (x,y) 在 S 中變動及 λ 在 λ 平面之有限區域中變動時,此級數(13)常關於 $(x,y;\lambda)$ 爲勻斂.故以

† $D(\xi,\xi;\lambda)$ 在 I 中可積,極易明白,因從8款(11),可知此與一連續函數所差者不過爲 $K(\xi,\xi)$ 之一常數倍數而已,又從此(11),可知 $D(\xi,\xi;\lambda)$ 之級數可以分項求積分.

(12) 及 (13) 代入 (11), 及在其左邊分項求積, 則得

$$\sum_{i=k}^{\infty}(\lambda-\lambda_1)^i\int_a^b g_i(\xi,\xi)d\xi=\lambda\sum_{i=m}^{\infty}ic_i(\lambda-\lambda_1)^{i-1}.$$

若以 λ 寫作 $\lambda=\lambda_1+(\lambda-\lambda_1)$, 則此式之右邊可展爲自 $(\lambda-\lambda_1)^{m-1}$ 起之依 $(\lambda-\lambda_1)$ 之正整冪依次前進之級數; 因 $\lambda_1\neq0$, $c_m\neq0$, 而其首項之係數不爲 0 也. 又因此式之左邊亦爲冪級數, 及必以與右邊相同之項起首, 故必 $k\leqq m-1$, 即

$$k<m \tag{14}$$

因 $k(x,y;\lambda)$ 爲 (12), (13) 之比之負者, 故得

定理6. 若 λ_1 爲 $K(x,y)$ 之根, 及 $k(x,y;\lambda)$ 爲 $\lambda K(x,y)$ 之逆函數, 則至少對於 S 中之若干點, $k(x,y;\lambda)$ 在 $\lambda=\lambda_1$ 上有一極.

若 k 不展開於 $D(\lambda)$ 之根之周圍; 而展開於 $\lambda=0$ 之周圍; 則因從 $D(\lambda)$ 之級數可知 $\lambda=0$ 不爲 $D(\lambda)$ 之根, 而函數 $k(x,y;\lambda)$ 在 $\lambda=0$ 上對於 λ 爲解析, (analytic) 及在此 $\lambda=0$ 點之周圍可展爲一冪級數, 此級數在以原點爲中心及大至某點爲止之圓中收斂 [此某點爲 λ 平面中與原點最近之 $D(\lambda)$ 之根]. 在此圓之外, 此級數雖能對於若干點 (x,y) 爲收斂, 但不能對於 S 中之一切點皆爲收斂. 此展開式必正爲級數 (2), 因 $|\lambda|$ 爲夠小時, 已知此級數代表 $k(x,y;\lambda)$ 也.

應用上之預備定理, 尚可作一進一層之研究. 若以 r 表小於「$D(\lambda)$ 之任意根之絕對值」之正常數; 則 $|\lambda|=r$ 時, 函數爲連續而不等於 0. 又從定理 3 知 $|\lambda|=r$ 及 (x,y) 在 S 中時,

$D(x, y; \lambda)$ 爲有限. 故從 (10) 知 $k(x, y; \lambda)$ 亦必如此. 於是從上之預備定理可知 (2) 之匀斂而得:

定理 7. 若 $K(x, y)$ 之根, 其絕對值最小者爲 λ_1; 則 $|\lambda| \leqq \rho \leqq |\lambda_1|$ 及 (x, y) 在 S 中時, 級數 (2) 關於 $(x, y; \lambda)$ 匀斂於 $k(x, y; \lambda)$, 此 $k(x, y; \lambda)$ 爲 $\lambda K(x, y)$ 之逆函數.

從 6 款之定理 5 及 1 得:

定理 8. 若 λ 不爲 $K(x, y)$ 之根, 則方程式 (1) 有 (及只有) 一關於 x 之連續解, 而此解爲

$$u(x, \lambda) = f(x) + \int_a^b \frac{D(x, \xi; \lambda)}{D(\lambda)} f(\xi) d\xi.$$

此 $u(x, \lambda)$ 在 λ 平面之一切有限點 [除爲 $D(\lambda)$ 之根者] 爲一解析函數, 且除極外無其他之異點. 此理易知, 無待詳論.

10. 齊次積分方程式之基本定理及其應用

本款論方程式

$$u(x)=\lambda\int_a^b K(x,\xi)u(\xi)\,d\xi, \tag{1}$$

仍假定 K 在 S 中有限及其不連續點為規則分佈; 及 $K(x,x)$ 在 I 中為可積.*

從 9 款定理 8 可知 λ 非 K 之根時, (1) 之惟一連續解顯為 $u=0$. 今但討論 λ 為 $D(\lambda)$ 之根時之情形可耳. 在 λ 為 $D(\lambda)$ 之根時, (1) 常有一「不恆等於 0 之連續解」† 其理如下:

設 λ_1 為 $D(\lambda)$ 之根. 以 λK 之行列式及其附屬式展為 9 款之 (12) 及 (13). 再以此二級數代入 9 款之 (8) 式, 而以 $(\lambda-\lambda_1)^k$ 除之. 因此第二級數為勻歛, 可由此得公式

$$\sum_{i=k}^{\infty} g_i(x,y)(\lambda-\lambda_1)^{i-k}-\lambda K(x,y)\sum_{i=m}^{\infty} c_i(\lambda-\lambda_i)^{i-k}$$
$$=\lambda\sum_{i=k}^{\infty}(\lambda-\lambda_1)^{i-k}\int_a^b K(x_1,\xi)g_i(\xi,y)\,d\xi. \tag{2}$$

因 $k<m$ [參觀 9 款 (14)], 在上式中令 $\lambda=\lambda_1$, 則除其左邊第一

---

* 此條件可如 9 款, 用「修改行列式及其附式」避免之.

† 此定理 Fredholm 首先證實. 此照 Kneser 氏, Rendiconti, of Palumo, vol. 22, (1906), p. 233.

級數中之第一項及右邊級數之第一項外,其餘之項皆等於0.故得

$$g_k(x,y)=\lambda_1\int_a^b K(x,\xi)g_k(\xi,y)d\xi \tag{3}$$

由此可知函數 $g_k(x,y)$ 中之 y 無論為 I 中之何數,此 $g_k(x,y)$ 必為 $\lambda=\lambda_1$ 時之(1)之一解.又從9款可知此 g_k 在 S 中為有限及其所有之不連續點為規則分佈,再從1款定理1,此(2)之右邊為在 S 中 $(x,y$ 之連續函數.故 g_k 為(1)之一連續解.又此 g_k 已知其不恆等於0.故已證明下之定理:

定理1. 方程式(1)有「不恆等於0之連續解」之充要條件為:λ 為 K 之根.

定義1. 凡齊次積分方程式之連續解之不恆等於0者,謂之 $K(x,y)$ 之主解 (principal bolution).* [詳言之,應曰關於 $K(x,y)$ 之(1)之主解.今不提(1)而但言 $K(x,y)$ 者,因 $K(x,y)$ 為(1)之主體.必 $K(x,y)$ 變而(1)方變;就(1)言不如逕就 $K(x,y)$ 言,如前於 $D(\lambda)$ 之根逕謂之 $K(x,y)$ 之根也].

從此定理1可知對於每一個 $D(\lambda)$ 之根必有相應之一個或一個以上之主解.實則對 $D(\lambda)$ 之一根必有無限個此種主解與之相應.此事易知,其理如下:

若 $u_1(x)$ 為與 λ_1 相應之第一主解,則 $c_1u_1(x)$ 自必亦為與 λ_1

---

*為意更完全計,此應謂之 $K(x,y)$ 之 x 方面主解.又凡

$$u(y)=\lambda\int_a^b K(x,y)u(x)dx$$

之連續解不恆等於0者,謂之 $K(x,y)$ 之 y 方主解.

相應之主解;此 c_1 爲不等於 0 之隨意常數.故必有無限個主解與 λ_1 相應.†

當 $\lambda=\lambda_1$ 時,若除 $c_1u_1(x)$ 之外,(1) 尙有他連續解,例如 $u_2(x)$. 則無論 c_1, c_2 爲何數

$$c_1u_1(x)+c_2u_2(x)$$

亦必爲(1)之連續解.照此推進,可知當 $\lambda=\lambda_1$ 時,若非(1)有無限個一次獨立之連續解,則關於 $\lambda=\lambda_1$ 之(1)之通解可寫作

$$c_1u_1(x)+c_2u_2(x)+\cdots+c_nu_n(x),$$

此 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 爲關於 $\lambda=\lambda_1$ 之「(1)之一次獨立之諸連續解」, $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 爲隨意常數.此 $u_1, \cdots, u_n$ 謂之「$\lambda=\lambda_1$ 時,(1)之諸解之基本解組 (fundamental system of solution)」;* n 謂之根 λ_1 之指標 (index). 此名稱不可與根之重數 (multiplicity) 相混.此兩名之定義如下:

定義 2. 與「$K(x, y)$ 之根 λ_1」相應之「$K(x, y)$ 之一次獨立主解之個數」謂之 λ_1 之指標. λ_1 爲解析函數 $D(\lambda)$[λK 之行列式]之重根時其重複之次數謂之 λ 之重數.[例如, λ_1 爲 $D(\lambda)$ 之五重根時, λ_1 之重數爲 5].

從與「一次代數方程式之理論」相類之情形,而望決定「K 之根之指標」,則須引入與「一組一次方程式式之行列式

† 注意定理 1 之證明中所得主解 $g_k(x, y)$ 中有一參數 y.

* 此與齊次一次代數聯立方程式之理論完全相類.例如可參考著者所著之 (Introduction to higher algebra).

之第二子式(minor),第三子式….」相應之諸級數[此如 $D(x,y;\lambda)$ 之級數與此行列式之第一子式相應]此類級數已經 Fredholm 氏求得,而爲其理論中之重要部分.渠曾以此類級數完全決定「$D(\lambda)$ 之任意根之指標」;並在他處渠曾證實一有趣之事實,卽 $D(\lambda)$ 之一根之指標不得大於其重數是也.其特例,因重數必須爲有限,故指標亦必須爲有限.此類問題之研究,讀者可參觀 Fredholm 氏之著作.以後12款中,當另以 E. Schmidt 氏之法證明 $D(\lambda)$ 之一實根之指標爲有限.

今以齊次積分方程式之兩種顯明應用,結束本款,其一爲關於「逆函數論之應用」,其二爲關於「非齊次積分方程式論」之應用:

定理2. 若 $K(x, y)$ 在 S 中爲有限,及其所有之不連續點爲規則分佈,及 $K(x, x)$ 在 I 中爲可積,則 K 有一逆函數之充要條件爲 K 之行列式不等於0.

此爲充分,8款定理已經證明.今證其必要;倘此行列式爲0,則方程式(1)有無限個連續解;從6款定理1,可知若 K 有一逆函數,則此爲不可能之事.

定理3. 若 λ 爲 $K(x, y)$ 之根,則方程式*

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)u(\xi)\,d\xi \tag{4}$$

或無連續解或有無限個連續解.[此(4)中假定 $f(x)$ 在 I 中連

* 吾人當然假定 $f(x)$ 在 I 中爲連續,且 K 適合本款之首所述之條件.

續，及 K 在 S 中爲有限及其所有之不連續點爲規則分佈，及 $K(x, x)$ 在 I 中爲可積]

此因以「齊次積分方程式 (1) 之任意連續解」加於「(4) 之第一連續解」後，其和仍爲 (4) 之解.

實則 (4) 之通解，爲以 (1) 之通解加於 (4) 之特解之和. 此與非齊次之一次微分方程式之情形相類，可參考之.

11. 對稱核 (Symmetric Kernels)

若函數 $K(x,y)$ 有 $K(x,y)\equiv K(y,x)$ 之性質,則此函數謂之對稱函數.凡積分方程式之核爲對稱者,不但在應用上居一重要地位(如 Hilbert 氏所示者),即其理論亦可用作'核非對稱之積分方程式論'之基礎.(參考 Hilbert 及 Schmidt 兩氏之論文)* 本款假定 K 在 S 中爲有限及其不連續點爲規則分佈.

定理 1. 若 $K(x,y)$ 爲對稱及在 S 中 K 之連續點上皆不爲 0, 則其一切層疊函數 $K_2(x,y), K_3(x,y),\cdots$ 皆爲對稱,及其中無一恆等於 0.

設層疊函數中第一個不爲對稱者爲 $K_n(x,y)$, 則

$$K_n(x,y)=\int_a^b K_{n-1}(x,\xi)K_1(\xi,y)d\xi, \qquad (1)$$

因 K_1 及 K_{n-1} 皆爲對稱,此式可變爲

---

* Hilbert 於 1904 年起,在 Göttinger Nachrichten 所發表之一組論文,其標題爲 "Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen"; E. Schmidt 之論文見 math. Ann. vol. 63(1907), p. 433. 此末一論文之大部分初見於 1905 之博士論文.至其關於非線形積分方程式之繼續探討見 Math. Ann. vol. 65(1908), p. 370.

$$\int_a^b K_1(y,\xi)K_{n-1}(\xi,x)\,d\xi,$$

此即 $K_n(y,x)$ 明矣,故 K_n 必對稱.

又若層疊函數中有能恆等於 0 者,而其中第一個恆等於 0 者爲 $K_{n-1}(x,y)$;則從 (1) 可知 $K_n(x,y)$ 亦必恆等於 0. 此 $n-1$ 及 n 之兩整數中,必有一個爲偶數.設此偶數爲 $2m$,則得

$$0\equiv K_{2m}(x,y)\equiv\int_a^b K_m(x,\xi)K_m(\xi,y)\,d\xi.$$

因 K_m 爲對稱,得

$$0\equiv K_{2m}(x,x)\equiv\int_a^b [K(x,\xi)]^2\,d\xi$$

此式只有 K_m 在其 S 中之連續點上皆爲 0 時方能成立.但從 6 款中已知 $K_2, K_3,\cdots$ 皆在 S 中全爲連續.由是得一矛盾,而本理即已證明.

今述一根本存在定理,此定理乃 Hilbert 首先證明者.以下之證乃 Kneser 氏之證法也.*

定理 2. 設對稱函數 $K(x,y)$ 在其連續點上皆不爲 0,則每一如此之 K 必至少有一根.(此根字參觀 9 款之定義).

若能證明無論 λ 爲何值 9 款之級數 (2) 對於 (x,y) 皆不勻斂,則此定理已經證明 (參觀 9 款定理 7). 倘 9 款之級數 (2),對於 λ 之一切值在 S 中皆爲勻斂;則級數

$$\lambda^2K_2(x,x)+\lambda^3K_3(x,x)+\cdots$$

* Loc. cit. p. 236.

對於λ之一切值,必在I中全爲勻歛.又因其各項皆爲連續,此級數可分項求積;及令

$$U_n=\int_a^b K_n(x,x)dx, \tag{2}$$

則級數

$$U_2\lambda^2+U_3\lambda^3+\cdots$$

對於λ之一切值均爲收歛.因此爲冪級數,此級數必爲絕對收歛;由是其一部分項所成之級數亦必爲收歛.故

$$U_2\lambda^2+U_4\lambda^4+U_6\lambda^6+\cdots \tag{3}$$

對於λ之一切值必爲收歛.

因K爲對稱,從6款之公式(4),得

$$U_{n+m}=\int_a^b\int_a^b K_n(x,\xi)K_m(x,\xi)\,d\xi dx,$$

而其特例爲

$$U_{2n}=\int_a^b\int_a^b [K_n(x,\xi)]^2\,d\xi\,dx \tag{4}$$

故展開顯明之不等式

$$\int_a^b\int_a^b [pK_{n+1}(x,\xi)+qK_{n-1}(x,\xi)]^2\,d\xi\,dx\geqq 0$$

(此p及q皆爲隨意實參數),得

$$p^2U_{2n+2}+2pqU_{2n}+q^2U_{2n-2}\geqq 0;$$

此式之左邊爲(p,q)之正有定二次式(positive definite quadratic form),故

$$U_{2n+2}U_{2n-2}-U^2_{2n}\geqq 0$$

因(4)及定理1,此諸U之下指標(subscript)既皆爲偶數,則此

諸 U 必皆爲正而不能爲0,故從上式可得

$$\frac{U_{2n+2}}{U_{2n}} \geqq \frac{U_{2n}}{U_{2n-2}} \tag{5}$$

今級數(3)中,兩連接項之比爲

$$\frac{U_{2n+2}}{U_{2n}}\lambda^2,$$

繼續應用(5)式,可知此式之値不小於

$$\frac{U_4}{U_2}\lambda^2.$$

於是令 $\lambda=\sqrt{U_2/U_4}$,則(2)中之項不遞減,而(2)不能爲收斂明矣.因此得一矛盾,而本定理已經證明.

從上之證,立可推知:

系. 照定理2之假設,$K(x,y)$ 至少有一根,而此根之絕對値不大於 $\sqrt{U_2/U_4}$,此兩 U 爲上(2)式所定者.

設對稱函數 $K(x,y)$ 有兩根 λ_1, λ_2,而與此兩根相應之兩主解依次爲 $u_1(x)$, $u_2(x)$,則

$$u_1(x)=\lambda_1\int_a^b K(x,\xi)u_1(\xi)\,d\xi$$

$$u_2(x)=\lambda_2\int_a^b K(x,\xi)u_2(\xi)\,d\xi.$$

以 $\lambda_2u_2(x)$ 乘此第一式,$\lambda_1u_1(x)$ 乘此第二式而減之,得

$$(\lambda_2-\lambda_1)u_1(x)u_2(x)=\lambda_1\lambda_2\int_a^a K(x,\xi)[u_1(\xi)u_2(x)-u_2(\xi)u_1(x)]\,d\xi$$

從此得

$$(\lambda_2-\lambda_1)\int_a^b u_1(x)u_2(x)\,dx$$

$$=\lambda_1\lambda_2\int_a^b\int_a^b[K(x,\xi)u_1(\xi)u_2(x)-K(\xi,x)u_1(x)u_2(\xi)]\,d\xi dx.$$

在此兩層積分之第二部分中,交換變數,可知此方程式之右邊爲0. 又因$\lambda_2\neq\lambda_1$,得下之結果

定理3. 若$u_1(x)$及$u_2(x)$爲與對稱函數$K(x,y)$之不同兩根相應之兩主解,則

$$\int_a^b u_1(x)u_2(x)dx=0.$$

以上所用之證法爲 Poisson 氏討論二階線微分方程式所創之法. 今再如 Schmidt 氏所爲,以此法證明下之定理:

定理4.* 函數$K(x,y)$爲對稱,則只能有實根.

因冪級數$D(\lambda)$之係數皆爲實數,如有虛根發生,同時必有其共軛虛根 (conjugate imaginary root) 與之成對而起. 即如$\mu+\nu i$爲其一虛根,同時必有$\mu-\nu i$之一虛根.今設對稱函數有此兩虛根,而與$\mu+\nu i$相應之主解爲$v(x)+iw(x)$,則

$$v(x)+iw(x)=(\mu+\nu i)\int_a^b K(x,\xi)[v(\xi)+iw(\xi)]\,d\xi$$

若在此方程式中分開其虛實兩部分,而成兩方程式;再合此兩方程式,即可知$v(x)-iw(x)$爲與$\mu-\nu i$相應之主解. 故從定理3可得

*此定理初爲 Hilbert 用完全相異之方法所證明. 可視作關於對稱行列式之著名定理之推廣. 參考 Weber 氏之 algebra, 2nd. Ed. vol. 1, p. 309.

$$\int_a^b \{[v(x)]^2+[w(x)]^2\}\,dx=0.$$

但此乃不可能之事,因 v 及 w 不能皆爲恆等於 0 也 (如 v, w 皆恆等於 0, 則 $v+iw$ 非主解矣). 由是本定理已經證明.

從 9 款可知凡 $K(x, y)$ 之根皆爲 $k(x, y; \lambda)$ 之極; 此 $k(x, y; \lambda)$ 爲 $\lambda K(x, y)$ 之逆. 今 $K(x,y)$ 爲對稱, 則 $k(x,y;\lambda)$ 之極皆爲一階, 其理如下. 用 9 款之記號, 凡根爲 λ_1, 則 $m=k+1$. 設極非一階, 則 $m>k+1$. 如是則從 10 款之公式 (2), 不但能如 10 款中, 令 $\lambda=\lambda_1$ 時可得

$$g_k(x, y)=\lambda_1\int_a^b K(x, \xi)g_k(\xi, y)\,d\xi, \tag{6}$$

并能先就 λ 微分 10 款之 (2), 再令 $\lambda=\lambda_1$, 而得

$$g_{k+1}(x, y)=\int_a^b K(x, \xi)g_k(\xi, y)\,d\xi+\lambda_1\int_a^b K(x, \xi)g_{k+1}(\xi, y)\,d\xi.$$

從 (6), 可將此式化爲

$$g_{k+1}(x, y)=\frac{g_k(x, y)}{\lambda_1}+\lambda_1\int_a^b K(x, \xi)g_{k+1}(\xi, y)\,d\xi \tag{7}$$

之形式. 再以 $g_k(x,y)$ 乘 (7) 之結果減去以 $g_{k+1}(x,y)$ 乘 (b) 之結果, 再從 a 至 b 求此減後結果之積分, 卽得

$$0=\frac{1}{\lambda_1}\int_a^b [g_k(x, y)]^2dx$$

$$+\lambda_1\int_a^b\int_a^b K(x, \xi)[g_k(x, y)g_{k+1}(\xi, y)-g_{k+1}(x, y)g_k(\xi, y)]\,d\xi dx.$$

此二層積分正與「上定理 3 之證法中之二層積分」有相同之情形, 故其值必等於 0. 由是得

$$\int_a^b [g_k(x, y)]^2 dx = 0,$$

此等式須對於y之一切值皆能成立. 但此乃不可能之事, 因$g_k(x, y)$不恆等於0也由是已證明下之定理:

定理5.* 若$K(x, y)$爲對稱; $k(x, y; \lambda)$爲$\lambda K(x, y)$之逆; 則在λ平面之有限部分中, k只有第一階之極 (poles of the first order) 而別無其他之異點.

所宜注意者此定理中並未言$D(\lambda)$只有單根 (卽並未言$D(\lambda)$無重根).

此就對稱核所得之結果, 可推廣之如下. 此種推廣, 乃Goursat氏所創者.†

作函數

$$K'(x, y) = \sqrt{p(x)p(y)q(x)q(y)}\kappa(x, y)$$

此中之κ既爲對稱又在其本身之一切連續點上皆不爲零, 而p, q在I中皆爲連續並常爲正 (不爲零). 如是則定理2, 4, 5中所有關於K之條件, 此K'均能滿足. 再令

$$r(x) = \sqrt{\frac{p(x)}{q(x)}}$$

* Boggio 氏曾作在更普遍情形下之此定理之證明, 參看 Paris, C. R. Oct. 14, 1907). 但 Boggio 之討論仍不若其後 Goursat 氏之結果更爲普遍. 又此定理可視爲一著名代數定理之推廣至無限多個變數者, 此代數定理卽第7款之行列式D_n之諸基本約數 (elementary divisors) 當行列式爲對稱且以λK代K時必均爲一次也. 可參考著者之 Introduction to Higher Algebra, p. 305.

† Paris, C. R. Feb 17, 1908.

及作函數

$$K(x,y)=\frac{r(x)}{r(y)}K'(x,y)=p(x)q(y)\kappa(x,y).$$

並以 $k'(x,y;\lambda)$ 表 $\lambda K'(x,y)$ 之逆函數,則從 6 款逆函數定義下之附註可知 $\lambda K(x,y)$ 之逆函數爲

$$\frac{r(x)}{r(y)}k'(x,y;\lambda).$$

凡函數之根皆爲「λ乘此函數之積」之逆函數之極.故凡 $K(x,y)$ 之根皆爲 $\frac{r(x)}{r(y)}k'(x,y;\lambda)$ 之極;又因此式之極即是 $k'(x,y;\lambda)$ 之極;而 $k'(x,y;\lambda)$ 之極即 $K'(x,y)$ 之根,故 $K(x,y)$ 之根即 $K'(x,y)$ 之根.故從定理 2, $K'(x,y)$ 至少有一根,亦即 $K(x,y)$ 至少有一根;及從定理 4,凡 $K'(x,y)$ 之根必皆爲實,亦即 $K(x,y)$ 之根必皆爲實;再從定理 5, $\lambda K(x,y)$ 之逆函數之有窮極 (finite pole) 皆只能爲一階而不能高於一階.由是得下之定理,而上之定理 2, 4, 5 皆包括於此定理中,猶此定理之特例而已.

定理 6. 若 $\kappa(x,y)$ 爲對稱及在其連續點上皆不爲零,又若 $p(x)$, $q(x)$ 在 I 中皆連續而不爲零,* 則對於函數

$$K(x,y)=p(x)q(y)\kappa(x,y)$$

至少有一根,且此種之根無不爲實,以及 $\lambda K(x,y)$ 之逆函數之有窮極皆不高於一階.

「此定理中除去 $p(x)$, $q(x)$ 爲正之條件者,因變 κ 之符號於結果無影響也」.

* 因 κ 如變號不影響此結果.故 p 及 q 爲正之限制可以除去.

12　互垂函數 (Orthogonal function)

先述其定義如下:

定義1. 設有函數 $u_1(x), u_2(x), \cdots$,其個數爲有窮或無窮;若

(a) 此諸函數皆爲實函數,及在 I 中皆爲連續;

(b) 此諸函數無一在 I 中恆等於0;

(c) 此諸函數中任意兩函數皆能滿足

$$\int_a^b u_i(\xi)u_j(\xi)\,d\xi=0$$

之關係式,則謂此諸函數在 I 中互相垂直.略稱之曰在 I 中之互垂函數.當 I 之範圍已極明顯時,「在 I 中」三字可以略去.

此互垂函數之理論及齊次積分方程(核爲對稱者)之理論間之關係,從11款定理3已極明顯.又在數學之別枝(其特例如數理物理中之隨意函數將其展爲由一組互垂函數所成之級數)中,互垂函數之作用,亦極爲重要.例如 Fourier 氏級數論中所討論之一組函數

$$\begin{cases} 1 \quad \cos x \quad \cos 2x \quad \cos 3x \cdots\cdots \\ \quad\ \sin x \quad \sin 2x \quad \sin 3x \cdots\cdots \end{cases}$$

即在$0\leqq x\leqq 2\pi$中之互垂函數是也.又如 Legendre 氏多項式

$$P_0(x), P_1(x), P_2(x),\cdots,$$

隨意函數可在$-1\leqq x\leqq +1$中展爲「各項爲此類多項式之級數」而此類多項式爲$-1\leqq x\leqq +1$中之互垂函數.但隨意函數雖亦可在$0\leqq x\leqq 1$中展爲「各項爲 Bessel 氏函數

$$J_0(\alpha_1 x), J_0(\alpha_2 x),\cdots,$$

之級數」(此$\alpha_1, \alpha_2,\cdots$爲超越方程式 (transcendental equation) $J_0(\alpha)=0$之諸根),而此類函數並非$0\leqq x\leqq 1$節中之互垂函數.但各以$\sqrt{x}$乘之,即變爲此節中之互垂函數矣.

故互垂函數之理論自必極爲重要.* 今先單就互垂函數討論,而後以所得結果應用於積分方程之理論†.

定理1. 若$u_1(x), u_2(x),\cdots u_n(x)$在$I$中爲互垂,則此諸函數必在$I$中爲一次獨立 (linearly independent).

倘若獨立,而能有

$$c_1u_1(x)+\cdots c_nu_n(x)=0$$

之關係,此諸常數c中至少有一個(例如ν)不爲零.以$u_\nu(x)$乘此方程式,而從a至b求其積分,則得

$$c_\nu\int_a^b [u_\nu(x)]^2\,dx=0,$$

* 據著者所知互垂 (orthogonal) 一字之用作此義,首見1889年冬 F. Klein 在 Göttingen 所發表關於數理物理之微分方程式之論文上.

† 參看 Gram 氏 Crelle. vol. 94, (1883) p. 41; 又 E. Schmidt, Math. Ann. vol. 63 (1907), p. 443.

此必不可能明矣.

定理2. 若$u_1(x),\cdots u_n(x)$皆爲實在I中皆爲連續,及爲一次獨立,則必有此諸函數所成之n個一次結合(linear combination)(係數爲實常數者)在I中爲互垂.

先假定此定理對於$n-1$個函數$u_1(x),\cdots u_{n-1}(x)$爲眞確,如是則由$u_1(x)\cdots u_{n-1}(x)$得$n-1$個「有實係數之一次結合」$v_1(x),\cdots v_{n-1}(x)$在I中爲互垂.於是所須證明者爲:可按照「函數

$$v_n(x)=c_1v_1(x)+\cdots+c_{n-1}v_{n-1}(x)+u_n(x) \tag{a}$$

在I中與$v_1(x),\cdots v_{n-1}(x)$爲互垂」之關係而定(a)式中諸實常數c,其證法如下.設k爲整數$1,2,\cdots n-1$中之任意一整數,以$v_k(x)$乘(a)式而從a至b求其積分,則得

$$\int_a^b v_n(x)v_k(x)\,dx=c_k\int_a^b[v_k(x)]^2dx+\int_a^b u_n(x)v_k(x)dx.$$

再令

$$c_k=-\frac{\int_a^b u_n(x)v_k(x)dx}{\int_a^b[v_k(x)]^2dx}\qquad(k=1,2,\cdots n-1),$$

則函數$v_n(x)$與$v_1(x),\cdots v_{n-1}(x)$自爲互垂.

欲完成用數學歸納法證此定理,只須再注意在一個函數時此定理爲眞可耳.

從上可知有無窮個互垂函數$u_1(x),u_2(x)\cdots$時,以隨意函數$f(x)$展爲

$$f(x)=c_1u_1(x)+c_2u_2(x)\cdots \tag{1}$$

式之級數之問題,常可從其本身知此級數在I節中有效,此I即$u_1(x), u_2(x),\cdots$在其中互垂之節也.現在不討論此問題,但示一形式上定其係數之方法,若已知此$f(x)$可以展爲(1)式之級數而此級數爲匀斂,並知此級數用任意連續函數乘過之後,可以分項求積分,則此係數之定法即完全合宜.

此係數之形式定法爲以$u_i(x)$乘(1)後從a至b分項求積分,因此$u_1(x), u_2(x),\cdots$爲互垂,故除一項之外其餘各項之積分皆爲0,而得

$$c_i=\frac{\int_a^b f(x)u_i(x)\,dx}{\int_a^b [u_i(x)]^2dx} \tag{2}$$

尋常求 Fourier 氏級數係數之公式,或求各項爲 Legendre 氏多項式之級數之係數之公式,或求各項爲 Bessel 氏函數之級數之係數之公式,皆爲此(2)之特例,自然明白,無待詳論.

函數$u_1(x),u_2(x),\cdots$以適宜之實常數乘之,可使此(2)之分母爲吾人所欲之任意常數,事極顯明.無待詳論.其特例如以適宜常數乘$u_1(x),u_2(x)\cdots$,而使(2)之分母之値皆等於1,則謂之使此諸函數$u_1(x),u_2(x),\cdots$爲合法(normalized).或謂此諸函數化爲合法.

定義2. 凡I中之一組互垂函數,若其中各函數之平方在I中之積分各爲1,則此組互垂函數,謂之一組合法互垂函數(A set of normalized functions).

比「上所論之將函數$f(x)$展爲(1)式之問題」較簡之問題爲求函數$f(x)$之近似代表之問題.詳言之卽(1)右爲無窮個互垂函數作成之無窮級數,此則以有窮個垂直函數$u_1(x),\cdots u_k(x)$作成類於(1)右之多項式而以之爲$f(x)$之近似代表是也(此就I中言).今設$f(x)$在I中爲有限,及在I中至多有有限個不連續點.而決定常數$c_1,\cdots c_k$如下:按最小二乘法(method of least square)之意思以定

$$F(x)=c_1u_1(x)+\cdots+c_ku_k(x)$$

中之各c,使在I中$F(x)$爲$f(x)$之最近似代表,卽求定諸常數$c_1,\cdots c_k$使

$$J=\int_a^b[f(x)-F(x)]^2dx$$

爲極小是也.先求得

$$\frac{\partial J}{\partial c_i}=-2\frac{\partial}{\partial c_i}\int_a^b f(x)F(x)dx+\frac{\partial}{\partial c_i}\int_a^b[F(x)]^2dx$$

再因

$$\int_a^b[F(x)]^2dx=\int_a^b\{c_1^2[u_1(x)]^2+\cdots+c_k^2[u_k(x)]^2\}dx,$$

得

$$\frac{\partial J}{\partial c_i}=-2\int_a^b f(x)u_i(x)dx+2c_i\int_a^b[u_i(x)]^2dx$$

令此等於0,卽得所求$c_1,\cdots c_k$之值,正與(2)所表示者相同.

因$\partial^2J/\partial^2c_i>0$, $\partial^2J/\partial c_i\partial c_j=0$,可知公式(2)正與$J$之極小值相應,而下之定理由是證明矣.

定理 3. 若 $u_1(x), \cdots u_k(x)$ 在 I 中互垂, $f(x)$ 在 I 中爲有限及至多有有限個不連續點; 則「在 I 中能按最小二乘法之意思以有限級數

$$c_1 u_1(x) + \cdots + c_k u_k(x)$$

爲 $f(x)$ 之最近代表」之充要條件: 爲以 (2) 定諸常數 c.

爲求較簡之公式計, 設諸函數 $u_i(x)$ 已經合法; 則積分 J 之極小值 [用 (2) 之諸值] 爲

$$\int_a^b \left[f(x) - \sum_{i=1}^n u_i(x) \int_a^b f(\xi) u_i(\xi)\, d\xi \right]^2 dx$$

$$= \int_a^b [f(\xi)]^2\, d\xi - \sum_{i=1}^n \left(\int_a^b f(\xi) u_i(\xi)\, d\xi \right)^2 \tag{3}$$

因此方程式之左邊爲正或 0, 其右邊亦必爲正或 0, 故可得一重要不等式

$$\sum_{i=1}^n \int_a^b f(\xi) u_i(\xi)\, d\xi)^2 \leqq \int_a^b [f(\xi)]^2\, d\xi^* \tag{4}$$

應用此不等式可證明下之定理(此定理之結果在 10 款中已經說及, 但在 10 款中尚未與以證明耳):

定理 4. 若在 S 中 $K(x, y)$ 爲有限及其不連續點爲規則

---

* E. Schmidt 名公式 (3) 爲 Bessel 氏恒等式, 又 (4) 式爲 Bessel 氏不等式, 因 Bessel 曾於 Astr. Nachr. vol. 6 (1828). p. 333. 上討論與此相彷之問題其所取之諸 u 爲三角函數, 但其中無積分, 只有有限和. 至此問題關於三角函數及 Legendre 氏多項式之討論首見 Plarr, Paris, C. R. vol. 44. (1857), p. 985.

分佈：則 $K(x, y)$ 之根之指標爲有限.

設 λ_1 爲 $K(x, y)$ 之實根，其相應實主解之互相獨立者共有 n 個.† 從定理2可由此 n 個主解作成 n 個互垂主解.再以此 n 個互垂主解化爲合法之後而名之曰函數 $u_1(x), \cdots u_n(x)$.於是以此諸函數爲(4)中諸 u 及以 $K(x, \xi)$ 爲(4)之 $f(\xi)$，[凡 x 爲定值時 $K(x, \xi)$ 在 I 中爲有限，及在 I 中只有有限不連續點] 及注意

$$u_i(x) = \lambda_1 \int_a^b K(x, \xi) u_i(\xi)\, d\xi \qquad (i = 1, 2, \cdots n),$$

則(4)變爲

$$\frac{1}{\lambda_1^2} \sum_{i=1}^{n} [u_i(x)]^2 \leqq \int_a^b [K(x, \xi)]^2 d\xi.$$

若從 a 至 b，就 x 求此式兩邊之積分，則因諸 u 已經合法，右邊之積分必爲 n/λ^2_1，而因此得

$$n \leqq \lambda_1^2 \int_a^b \int_a^b [K(x, \xi)]^2\, d\xi\, dx. \tag{5}$$

從此不等式可知「與 λ_1 相應之一次獨立實主解」之個數 n 之上限.至於一次獨立之複素主解不能多於一次獨立之實主解，乃顯而易見之事.故本定理可由此證明.

從不等式(5)亦可知實根 λ_1 之絕對值之下限.令 $n=1$，則得任意實根之絕對值之下限.故凡核爲對稱式，或其廣例而核爲11款定理6中之 K，則其根絕對值無一能小於

$$\frac{1}{\sqrt{\int_a^b \int_a^b [K(x, \xi)]^2\, d\xi\, dx}}.$$

† 此處並不除去可以發生之其他互相獨立之主解.

在核爲對稱或11款定理6之K時,6款之定理2可代以下之更進一步之定理:

定理5. 若有限函數K(其不連續點爲規則分佈者)能滿足11款定理6之條件,及

$$\int_a^b \int_a^b [K(x, \xi)]^2 \, d\xi \, dx < 1,$$

則6款之級數(5)爲絕斂及勻斂.

在$K(x, y)$爲對稱時,K之根及解亦常依次謂之特性數(characteristic number)及特性函數 (characteristic function).* 從11款可知凡特性數皆爲實數;及凡與兩不同特性數相應之兩特性函數必爲互垂.又從定理4可知特性數之指標爲有限.對於各特性數(其指標大於1者),可取一組n個互垂特性函數,使關於此特性數之其餘特性函數皆一次依靠在此組之上.由是可得在I中互垂之特性函數$u_1(x), u_2(x), \cdots$(其個數爲有限或無限各隨其本性而定),而使K之各特性函數各一次依靠在其中有限個u之上.此一組$u_1(x), u_2(x), \cdots$謂之特性函數之完全互垂組 (complete orthogonal system of characteristic function).此完全互垂組自可將其變爲合法.

一根本重要問題爲:在何種條件之下,函數$f(x)$可展爲一級數,使其各項爲「此等特性函數之完全互垂組中之元素之常數倍數」及此級數之係數可按公式(2)定之? 此問題之

* 德文爲 Eigenwerte 及 Eigenfunktionen, 僅於K爲對稱時此名詞之定義爲正確.至對於不對稱核K可參考E. Schmidt之定義 loc. cit. p. 461.

處分可參考Hilbert及Schmidt兩氏之論文.* 今但論其雖爲特例而實重要之問題,卽所展之函數$f(x)$爲對稱核$K(x, y)$之問題是也.但此亦不過略行討論而已.

設特性函數之完全互垂組$u_1(x)$, $u_2(x)$,$\cdots$已經化爲合法,其相應之特性數爲$\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ (此中不妨有相同之數).† 當令$f(x)=K(x, y)$時,公式(2)化爲

$$c_\nu=\int_a^b K(x, y)\, u_\nu(x) dx=\frac{u_\nu(y)}{\lambda_\nu}.$$

由是(從純粹形式上之方法)變爲須考級數

$$\frac{u_1(x)u_1(y)}{\lambda_1}+\frac{u_2(x)u_2(y)}{\lambda_2}+\cdots\cdots \tag{6}$$

是否爲收斂,是否能代表函數$K(x, y)$.今可以Schmidt氏之法證明Hilbert氏之定理如下:

定理6. 若在S中,對稱函數$K(x, y)$爲有限,其不連續點爲規則分佈;又若$u_1(x)$, $u_2(x)$,$\cdots$爲K之特性函數之完全合法互垂組,及$\lambda_1, \lambda_2, \cdots$爲相應特性數;則若級數(6)在$S$中勻斂,此級數在$K$之一切連續點上代表$K(x, y)$.

因(6)爲勻斂及其各項皆爲連續,此(6)所表之函數亦必爲連續.又此(6)顯爲對稱.故函數

* 又可參考 Kneser, Math. Ann. vol. 63. (1907)p 47, 此文可應用於「依據二次線微分方程式之解求出隨意函數之法」之問題.此種應用Hilbert曾探討之,但未十分成功.

†注意:此諸λ無須完全互異.

$$Q(x,\xi)=K(x,\xi)-\Sigma\frac{u_i(x)u_i(\xi)}{\lambda_i} \tag{7}$$

爲對稱及在S中爲有限,及其不連續點爲規則分佈.倘此定理爲不眞.則Q在其一切連續點上皆不爲零;而從11款定理2,此Q至少有一特性數c.設$\psi(x)$爲與c相應之「Q之特性函數」,則

$$\psi(\xi)=c\int_a^b Q(\xi,\xi_1)\psi(\xi_1)\,d\xi. \tag{8}$$

若以$u_i(\xi)\,d\xi$乘(7)而求其積分,則因諸u已經化爲合法,可得

$$\int_a^b Q(x,\xi)u_i(\xi)\,d\xi=\int_a^b K(x,\xi)u_i(\xi)\,d\xi-\frac{u_i(x)}{\lambda_i}=0. \tag{9}$$

從(8)及(9)可得

$$\int_a^b \psi(\xi)u_i(\xi)\,d\xi=c\int_a^b\int_a^b Q(\xi,\xi_1)u_i(\xi)\psi(\xi_1)\,d\xi_1\,d\xi=0. \tag{10}$$

以$\psi(\xi)\,d\xi$乘(7)而求其積分,及用(10)理,得

$$\int_a^b Q(x,\xi)\psi(\xi)\,d\xi=\int_a^b K(x,\xi)\psi(\xi)\,d\xi.$$

從(8)可知此式左邊爲$\psi(x)/c$,故

$$\psi(x)=c\int_a^b K(x,\xi)\psi(\xi)\,d\xi.$$

因$\psi(x)$在I中爲連續及不恆等於0,從此可知$\psi(x)$爲K之一特性函數;因此$\psi(x)$必一次依靠在有限個u之上.但從定理1可知此乃不可能之事,因從(10)而論,此ψ與一切u爲互垂也.既因假定此定理爲不眞而發生此矛盾之結果,則本定理已證明矣.

若(6)之級數只有有限個项,即若K只有有限個特性數,則(6)為匀歛之條件自能滿足.在此種情形之下,從本定理可知K在其連續點上必等於(6)之級數,而此級數在S中全為連續.故凡K所有之不連續點必為可移去之不連續點,可移去之不連續點(removable discontinuities)者,在其點上以適宜之法更換函數K之定義時,可使函數K在其上變為連續者也.

反是,若有一「有限項之和」

$$f_1(x)\phi_1(y)+f_2(x)\phi_2(y)+\cdots\cdots+f_n(x)\phi_n(y) \tag{11}$$

其諸f及諸ϕ皆在I中為連續;而在S中K之連續點上,此和皆等於K;則極易證明此K只有有限個特性數,如下:當計算此種特性數時,可先以(11)居$K(x, y)$之地位.再以(11)代級數$D(\lambda)$[9款(6)式]中之K後,可知此級數中凡階數高於n之行列式無不為0.由是則$D(\lambda)$至多為λ之n次多項式,而只能有有限個根明矣.此既證明,可得下之定理:

定理7. 若在S中對稱函數$K(x, y)$為有限及其不連續點為規則分佈,則K只有有限個特性數之充要條件為有(11)式之和存在(此和中之諸f及諸ϕ在I中為連續)及此和在S中K之連續點上與K相等.

其特例,若對稱函數$K(x, y)$在S中為有限,及其不連續點不全能移去,則此K必有無限個特性數.

13. 第一種積分方程式其核為有限者

本款及下款略論第一種積分方程式.今所論者以下式為主體.

$$f(x)=\int_a^x K(x,\xi)u(\xi)\,d\xi \tag{1}$$

此式 Volterra 氏* 曾經十分討論 Picard 氏曾提議,應稱之為 Volterra 氏方程式.

設 K 在 T 中為連續及其導式

$$K_1(x,y)=\frac{\partial K}{\partial x}$$

在 T 中為有限及此導式之不連續點在 T 中規則分佈.欲 (1 在 I 中有一連續解 $u(x)$, 必須 $f(x)$ 在 I 中為連續及 $f(a)=0$, 乃顯而易見之事.求 (1) 之微分得

$$f'(x)=K(x,x)u(x)+\int_a^x K_1(x,\xi)u(\xi)d\xi. \tag{2}$$

從此可更得一必要條件,即 $f(x)$ 須有導式 $f'(x)$ 而此 $f'(x)$ 須在 I 中連續是也.此 (2) 為第二種積分方程式,欲其合於 5, 6 兩款所有條件,只須在 K 上更加一「$K(x,x)$ 在 I 中之任意

---

* 參看第 6 款所示之諸論文及 Holmgren, Atti of the Turin Academy, vol. 35(1900), p. 570 及 T. Labesco, Journal de Mathématique. 6th ser. vol. 4(1908), p. 125.

點上不爲0」之條件.加此條件後,即可推知(1)只能有一個連續解;及若有一連續解,則此解卽爲(2)之連續解.

又加此 $K(x, x)$ 在 I 中任意點上不爲 0 之條件後,可從(2)反推至(1),因(2)可寫作

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)-\int_a^x K(x, \xi)u(\xi)\,d\xi\right]=0.$$

故(2)之連續解必能滿足方程式

$$f(x)-\int_a^x K(x, \xi)u(\xi)\,d\xi=\text{常數}.$$

再從 x 逼近 a 時此式之極限,可知此常數必爲 0. 故已證明下之定理:

定理1.* 若 $K(x, \xi)$ 在 T 中爲連續,並有「在 T 中爲有限之偏導式 $K_1=\partial K/\partial x$」,及此導式之不連續點在 T 中規則分佈;又若 $K(x, x)$ 在 I 中之任意點不爲 0;則(1)有一連續解之充要條件爲: $f(x)$ 及其導式 $f'(x)$ 皆在 I 中爲連續及 $f(a)=0$. 若此諸條件已皆滿足,則(1)只有一個連續解,而此解卽爲第二種方程式(2)之連續解.†

---

* 參看 Lincei I 及 Torino I. 至一較早而不完全之討論見 Le Roux, Annales de l'Ecole normale supérieure, 3 rd. ser. vol. 12(1895), p. 243.

† Volterra 曾另用一種方法化方程式(1)爲第二種方程式,此法須作一部分積分,

令 $$K_2(x, y)=\frac{\partial K(x, y)}{\partial y}, \qquad U(x)=\int_a^x u(\xi)d\xi$$

用部分積分法,(1)式變爲

$$f(x)=K(x, x)U(x)-\int_a^x K_2(x, \xi)U(\xi)\,d\xi \tag{2'}$$

讀者試求出「微分(2')式之連續解卽可求得(1)式之一般連續解」之條件.

凡 $K(x, x)$ 在 I 中一點或若干點爲零時,其情形如何,今不深考,但略論之,使足示此確爲一除外例而已.

先設 $K(x, x)$ 在 I 中恆等於零.則(2)變爲

$$f'(x)=\int_a^x K_1(x, \xi)u(\xi)\,d\xi \tag{3}$$

再設不但 K 在 T 中爲連續,而 K_1 在 T 中亦爲連續,及 $K_1(x, x)$ 在 I 中之任一點上不等於0;卽可知若 K_1 有一有限導式及此導式之不連續點規則分佈,則方程式(3)卽合於定理1.又如前可知凡(3)之連續解亦卽(1)之解,而得

定理2. 若 $K(x, \xi)$ 及 $K_1(x, \xi)=\partial K/\partial x$ 皆在 T 中爲連續;$K_{11}(x, \xi)=\partial^2 K/\partial x^2$ 在 T 中爲有限及其不連續點規則分佈;及 $K(x, x)\equiv 0$ 而 $K_1(x, x)$ 在 I 中之任意點上不爲零;則(1)有一連續解之充要條件爲:$f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ 皆在 I 中爲連續及 $f(a)=f'(a)=0$. 若此諸條件已皆滿足;則(1)只有一個連續解,而此解可由(3)得之.

此可再以 $K_1(x, x)\equiv 0$ 之條件代 $K_1(x, x)$ 在 I 中任意點上不爲零之條件,向前進論.但此可讓讀者自考之.

再 $K(x, x)$ 在 I 中之有限個點上爲零時,其詳細情形 Volterra 氏已經深考.* 今取一簡單例論之,其結果已可示普通情形之模範矣.

就方程式

* Torino III, IV. 又可參看本款之首,所舉 Holmgren 及 Labesco 之論文.

$$0=\int_0^x(\alpha\xi+\beta x)\,u(\xi)d\,\xi \qquad (\alpha+\beta\fallingdotseq 0) \tag{4}$$

考之.當 $\xi=x$ 時, $\alpha\xi+\beta x$ 變爲 $(\alpha+\beta)x$, 而此在 $x=0$ 時亦爲零.微分(4)式兩次,可知除 $x=0$ 時外,凡「此方程式能有之連續解」必有一連續導式 $u'(x)$; 及 $u(x)$ 可照此法由微分方程式

$$(\alpha+\beta)xu'(x)+(\alpha+2\,\beta)u(x)=0 \tag{5}$$

得之(此微分方程式卽微分(4)式兩次之結果).

此微分方程式之通解爲

$$u(x)=cx^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta}-1} \tag{6}$$

若 $c\fallingdotseq 0$, 則在及但在 $\beta/(\alpha+\beta)\leqq -1$ 時,此解爲連續;而此 $\beta/(\alpha+\beta)\leqq -1$ 之條件卽同於

$$0>\frac{\alpha+\beta}{\beta}\geqq -1,$$

亦卽同於

$$-1>\frac{\alpha}{\beta}\geqq -2. \tag{7}$$

故若能滿足(7)之條件,則(6)之函數顯爲(4)之一連續解,又因(6)中有一隨意常數,故已證明下之定理:

定理 3. 除(7)之條件能滿足外,方程式(4)有一(及只有一)連續解(卽 $u=0$).若(7)能滿足,則方程式有無限個連續解.

讀者可推廣此結果於範圍更廣之方程式

$$f(x)=\int_0^x(\alpha\xi+\beta\,x)u(\xi)\,d\xi \tag{8}$$

此(8)之 $f(x)$ 爲合於下之條件者: $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ 皆在 I 中爲連續, 及 $f(0)=f'(0)=0$.

以上所用之方法不但可從之得(4)或(8)之連續解, 有時(當(7)不能滿足時)亦可得「不連續而可積分之解」. 例如 $\alpha/\beta<-2$ 時(6)之函數旣爲可積又爲(4)之一解.

今論範圍更廣之第一種積分方程式

$$f(x)=\int_a^b K(x,\xi)u(\xi)\,d\xi \tag{9}$$

Volterra 氏方程式爲此式之特例; 卽其 $y>x$ 時 $K(x,y)$ 爲零之一例也. 若更細察其相互之關係, 就定理1之積分方程式而論, 核 $K(x,y)$ 在 $x=y$ 之直線之各點上, 由 $K(x,x)$ 之值一躍而爲0; 躍過之値爲有限, 此可謂之有限躍(finite jump). 卽 $K(x,y)$ 經過此 $x=y$ 直線時, 在此線之各點上, 由 $K(x,y)$ 之値經一有限躍而爲0也. 其較難討論之情形爲「沿此直線上無不連續點」或「此直線上只有有限個點爲不連續點」之二種.

由此暗示, 可以直線 $x=y$ 改爲曲線 $y=\phi(x)$ 而討論之. 並假定此曲線從 S 平方之左下角(lower left-hand)至右上角(upper right-hand)經過此平方之本身, 及 $\phi(x)$ 在 I 中爲連續並有在 I 中爲連續之導式 $\phi'(x)$; 如是則 $\phi(a)=a$, $\phi(b)=b$, 及

$$a<x<b \text{ 時, } a<\phi(x)<b.$$

沿此曲線, 假定函數 $K(x,y)$ 有一有限躍; 卽若 (x_0,y_0) 爲此曲線上之任意點, 而在此點上

$$y_0 \neq a, \qquad y_0 \neq b,$$

則假定兩極限

$$K(x_0, y_0-0) \text{ 及 } K(x_0, y_0+0)$$

爲存在.此兩極限之差謂之 (x_0, y_0) 點上躍之差,而以

$$J(x_0)=K(x_0, y_0-0)-K(x_0, y_0+0)$$

表之.

再設此函數 $J(x)$ 在 I 中爲連續;並設 K (在 S 中爲有限,及除沿曲線 $y=\phi(x)$ 上外 K 在 S 中爲連續,及 K 有偏導式

$$K_1(x, y)=\partial K/\partial x.$$

而此偏導式在 S 中爲有限及其不連續點爲規則分佈.

以 (9) 改爲

$$f(x)=\int_a^{\phi(x)} K(x, \xi)u(\xi)d\xi+\int_{\phi(x)}^b K(x, \xi)u(\xi)\,d\xi$$

之形式.

微分之得

$$f'(x)=J(x)\phi'(x)u(\phi(x))+\int_a^b K_1(x, \xi)u(\xi)\,d\xi \tag{10}$$

若 J 及 ϕ' 在 I 中皆不爲零,則用 $z=\phi(x)$ 之變形[此 $z=\phi(x)$ 之反函數爲 $x=\psi(z)$] 可將 (10) 化爲一第二種積分方程式,其核爲

$$\frac{-K_1(\psi(z), \xi)}{J(\psi(z))\phi'(\psi(z))}$$

若此函數之行列式(或其修改行列式)不爲零,則如 $f'(x)$ 爲連續,此 (10) 有一連續解.但不能從此卽斷 (9) 亦有一連續解.此 (10) 之連續解顯能滿足形式爲

$$f(x)+\lambda=\int_a^b K(x,\xi)u(\xi)\,d\xi \tag{11}$$

之方程式,及只能對於 λ 之一值能滿足此方程式.由是得下之結果:

定理4. 若下之連續之諸條件皆能滿足:

(1) $K(x,y)$ 在 S 中爲有限及除曲線 $y=\phi(x)$ 上外, $K(x,y)$ 在 S 中爲連續;

(2) $\phi(x)$ 能滿足

$$\phi(a)=a,\qquad \phi(b)=b$$

兩條件.及在 I 中 $\phi(x)$ 爲連續並有連續導式 $\phi'(x)$; 及 $\phi'(x)$ 在 I 中不爲零; ϕ 之反函數爲 ψ;

(3) 在 I 之各點(除去兩端點)上,兩極限

$$K(x,\phi(x)-0)\ 及\ K(x,\phi(x)+0)$$

皆存在,及其差

$$J(x)=K(x,\phi(x)-0)-K(x,\phi(x)+0)$$

在 I 中爲連續而不爲零.

(4) $K(x,y)$ 有偏導式

$$K_1(x,y)=\partial K/\partial x.$$

此偏導式在 S 中爲有限及其不連續點爲規則分佈;

(5) $f(x)$ 在 I 中爲連續及有連續之導式;

又若函數

$$\frac{-K_1(\psi(z),\xi)}{J(\psi(z))\phi'(\psi(z))}$$

之行列式或其修改行列式不爲零;則有(及只有)參數 λ 之一值,方程式(11)對之有一連續解,而此解即是(10)之連續解.

當 $J(x)\equiv 0$ 時此定理應如何推廣,讀者可自考之.非難事也.

14. 第一種方程式其核或節非有限者

今如 Volterra 氏,* 設方程式

$$f(x)=\int_a^x K(x,\xi)u(\xi)\,d\xi \tag{1}$$

之核 K 之形式為

$$K(x,\xi)=\frac{G(x,\xi)}{(x-\xi)^\lambda} \qquad (0<\lambda<1),$$

及此中之 G 在 T 中為連續而討論之. 此 (1) 為 Abel 氏方程式之推廣;故可如 3 款之研究,知苟非 $f(x)$ 在 I 中為連續及 $f(a)=0$, 則 (1) 不能有連續解.

設 (1) 有一連續解,可求之如下: 設 z 合於

$$a\leqq z\leqq b,$$

以 $(z-x)^{\lambda-1}dx$ 乘 (1), 而求其結果之積分,得

$$\int_a^z\frac{f(x)dx}{(z-x)^{1-\lambda}}=\int_a^z\frac{1}{(z-x)^{1-\lambda}}\int_a^x\frac{G(x,\xi)}{(x-\xi)^\lambda}u(\xi)d\xi\,dx. \tag{2}$$

此式之右邊,可照 Dirichlet 氏推廣公式(參觀 1 款)將其化為

* 參閱 Torino II.

$$\int_a^z u(\xi)\int_\xi^z \frac{G(x,\xi)}{(z-x)^{1-\lambda}(x-\xi)^\lambda}\,dx\,d\xi.$$

故若命

$$\left.\begin{aligned} F(z)&=\int_a^z \frac{f(x)}{(z-x)^{1-\lambda}}\,dx \\ L(z,\xi)&=\int_\xi^z \frac{G(x,\xi)}{(z-x)^{1-\lambda}(x-\xi)^\lambda}\,dx \qquad (z>\xi) \end{aligned}\right\}, \tag{3}$$

則(2)式變爲

$$F(z)=\int_a^z L(z,\xi)u(\xi)\,d\xi \tag{4}$$

今證此方程式之核 L 在 T 中爲連續(但在 T 中須除去 $z=\xi$ 之直線,因 L 在此直線上尙是未定也).簡言之,卽 L 在 $z=\xi$ 直線外之 T 中點上皆爲連續.而其證如下:設換積分之變數,命

$$y=\frac{x-\xi}{z-\xi},$$

則得: $z>\xi$ 時,

$$L(z,\xi)=\int_0^1 \frac{G[(z-\xi)y+\xi,\xi]}{(1-y)^{1-\lambda}y^\lambda}\,dy. \tag{5}$$

固以 G 之絕對值之上限代入(5)後,(5)之積分仍爲收斂,故此積分必在 T 中勻斂,又因 G 爲連續,故 L 在其定區中亦爲連續.

再考 (z,ξ) 逼近 T 之斜邊上之點 (c,c) 時,L 是否亦逼近一極限(卽此極限是否存在),此可將積分之中値律應用於 L 之原有定義,而得

$$L(z,\xi)=G(s,\xi)\int_{\xi}^{z}\frac{dx}{(z-x)^{1-\lambda}(x-\xi)^{\lambda}}=\frac{\pi}{\sin\lambda\pi}G(s,\xi)\quad(\xi<s<z)$$

故
$$\lim_{\substack{z=c\\ \xi=c}}L(z,\xi)=\frac{\pi}{\sin\lambda\pi}G(c,c). \tag{6}$$

以此極限值爲 $L(c,c)$ 之定義,則 L 在 T 中各處爲連續;又若令 $G(x,x)$ 在 I 之任意點上不爲零,則 $L(x,x)$ 在 I 之任意點上亦不爲零.

欲(4)合於13款定理1,只須在 G 上略加限制,使「$L(z,\xi)$ 關於 z 有偏導式,及此偏導式在 S 中爲有限,且其不連續點爲規則分佈」.爲避免繁複說明計,可假定 $G(z,\xi)$ 有偏導式

$$G_1(z,\xi)=\partial G/\partial z,$$

而此偏導式在 I 中爲連續.

於是若在積分號下,就 z 微分(5)式,卽得

$$\int_0^1\left(\frac{y}{1-y}\right)^{1-\lambda}G_1[(z-\xi)y+\xi,\xi]dy.$$

因此積分顯爲匀斂.從在積分號下求微分之尋常審查法,可知此積分能代表

$$L_1(z,\xi)=\partial L/\partial z,$$

但或須除去 T 之斜邊,因(5)式在此斜邊上爲無效.故此積分亦許在此斜邊上不能代表 $L_1(z,\xi)$ 也.從此代表 L_1 之積分式可知 L_1 在 T 中爲有限,及從此積分之匀斂可知 L_1 在 T 中爲連續[但須除去 T 之斜邊 $z=\xi$].

現在可以13款定理1應用於(4)矣.故此(4)有一連續解

之充要條件爲: $F(z)$ 在 I 中爲連續,及有連續導式,及 $F(a)=0$. 若 $f(x)$ 在 I 中爲連續,則從1款定理2可知此諸條件中首末兩件皆能滿足.由是又得一個(1)有連續解之必要條件,即 $F(z)$ 有一連續導式是也.

現在所須證者爲: 若上言之條件已皆滿足,則(4)之連續解能滿足(1)式.欲證此理,先就 z 求(4)之微分,再以 $(x-z)^{-\lambda}$ 乘之,此 x 須合於

$$a \leqq x \leqq b.$$

再從 a 至 x 求其積分,得

$$\int_a^x \frac{1}{(x-z)^\lambda} \frac{d}{dz} \int_a^z \frac{f(\xi)}{(z-\xi)^{1-\lambda}} d\xi\, dz$$

$$= \int_a^x \frac{1}{(x-z)^\lambda} \frac{d}{dz} \int_a^z u(\xi) \int_\xi^z \frac{G(\xi_1, \xi)}{(z-\xi_1)^{1-\lambda}(\xi_1-\xi)^\lambda} d\xi_1\, d\xi\, dz. \qquad (7)$$

從1款定理3可知此方程式之右邊爲

$$\frac{d}{dx} \int_a^x \frac{1}{(x-z)^\lambda} \int_a^z \frac{f(\xi)}{(z-\xi)^{1-\lambda}} d\xi\, dz.$$

再從 Dirichlet 氏之推廣公式,可將此式化爲

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(\xi) \int_\xi^x \frac{dz}{(x-z)^\lambda (z-\xi)^{1-\lambda}} d\xi$$

$$= \frac{\pi}{\sin \lambda\pi} \frac{d}{dx} \int_a^x f(\xi)\, d\xi = \frac{\pi}{\sin \lambda\pi} f(x).$$

從1款定理3,(7)式之右邊,可化爲

$$\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{1}{(x-z)^\lambda}\int_a^z u(\xi)\int_\xi^z \frac{G(\xi_1,\xi)}{(z-\xi_1)^{1-\lambda}(\xi_1-\xi)^\lambda}\,d\xi_1\,d\xi\,dz.$$

從 Dirichlet 氏推廣公式之三層應用;此式又可化爲

$$\frac{d}{dx}\int_a^x u(\xi)\int_\xi^x \frac{1}{(x-z)^\lambda}\int_\xi^z \frac{G(\xi_1,\xi)}{(z-\xi_1)^{1-\lambda}(\xi_1-\xi)^\lambda}\,d\xi_1\,dz\,d\xi$$

$$=\frac{d}{dx}\int_a^x u(\xi)\int_\xi^x \frac{G(\xi_1,\xi)}{(\xi_1-\xi)^\lambda}\int_{\xi_1}^x \frac{dz}{(x-z)^\lambda(z-\xi_1)^{1-\lambda}}\,d\xi_1\,d\xi$$

$$=\frac{\pi}{\sin\lambda\pi}\,\frac{d}{dx}\int_a^x\int_a^{\xi_1} u(\xi)\,\frac{G(\xi_1,\xi)}{(\xi_1-\xi)^\lambda}\,d\xi\,d\xi_1$$

$$=\frac{\pi}{\sin\lambda\pi}\int_a^x u(\xi)\,\frac{G(x,\xi)}{(x-\xi)^\lambda}\,d\xi.$$

將上得之值代入(7)之左右兩邊,即可得(1). 此已證明下之定理:

定理. 若 $G(x,\xi)$ 及其導式

$$G_1(x,\xi)=\partial G/\partial x$$

在 T 中爲連續,及 $G(x,x)$ 在 I 中不爲零,則方程式

$$f(x)=\int_a^x \frac{G(x,\xi)}{(x-\xi)}\,u(\xi)d\xi \qquad (0<\lambda<1)$$

有一連續解之充要條件爲: $f(x)$ 在 I 中連續,及

$$f(a)=0,$$

及函數

$$F(x)=\int_a^x \frac{f(\xi)}{(x-\xi)^{1-\lambda}}\,\xi d$$

在 I 中有連續導式.若此諸條件已全滿足,則此方程式只有一連續解,而此解即(4)之連續解;(4)中之 L 爲(3)所定者.

從1款定理3,可知「F 有一連續導式」之「充分而非必要」之條件爲: f 爲連續及 f 有有限導式(其不連續點只有有限個).

若 $G(x,\xi)\equiv 1$,則(1)化爲3款之(1),而

$$L=\pi/\sin\lambda\pi.$$

因此(4)變爲

$$\int_a^z \frac{f(x)}{(z-x)^{1-\lambda}}\,dx=\frac{\pi}{\sin\lambda\pi}\int_a^z u(\xi)\,d\xi,$$

從此求微分(照3款中之一切假定),即得3款中之(4),(5)兩解.當

$$G(x,x)\equiv 0$$

時,上所得之定理,略加修改仍可適用.此由讀者自考之可耳.

13款之方程式(1),其函數 $K(x,y)$ 有「$K(x,x)$ 恆等於零,及其導式 $K_1(x,y)$ 之形式爲

$$K_1(x,y)=\frac{G(x,y)}{(x-y)^\lambda}\qquad (0<\lambda<1),$$

及此 G 在 T 中爲連續之性質者,亦可應用本款之定理.但此亦可由讀者自考之,而以所得之結果作一精密之定理.3款之定理4即此之特例也.

有一重要方程式,與本款所討論者相類,即 Hilbert 及 Kellogg 兩氏所討論之

$$f(x)=\int_0^1\{\operatorname{ctn}\pi(x-\xi)+G(x,\xi)\}u(\xi)\,d\xi$$

是也.此 $G(x,\xi)$ 假定其在 S 中爲有限.欲此積分有意義當須如 Cauchy 氏所用之名稱,釋之以主値 (principal value). 此方程式之研究,可參觀 Kellogg 氏之論文 17—27 頁:此論文即 "Zur Theorie der Integralgleichungen und des Dirichletschen Princips" Göttingen, 1902. 今略論 Fourier 氏之積分方程式以結本書.此方程式亦許是世界首先奏效之積分方程式.

Fourier 氏積分定理之一形式含在公式

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty\cos(x\,\xi)\cos(\xi\xi_1)f(\xi_1)d\xi_1\,d\xi \tag{8}$$

之中.

只要 $f(x)$ 能滿足某某條件,此公式在 $0\leqq x$ 時爲有效;例如,只要 $0\leqq x$ 時,$f(x)$ 爲連續;及在任意點之近隣中 $f(x)$ 無「無限個極大極小」;及

$$\int_0^\infty|f(x)|\,dx$$

爲收斂;則 (8) 式即能在 $0\leqq x$ 時爲有效.從公式 (8) 可知合於上言諸件時,第一種積分方程式

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\cos(x\xi)u(\xi)\,d\xi \tag{9}$$

有一連續解

$$u(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\cos(x\xi)f(\xi)\,d\xi \tag{10}$$

其逆依同法可知(10)爲(9)之惟一連續解，而此可以Fourier氏積定理表之.

方程式(9)，以連續對稱函數

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(x\xi) \tag{11}$$

爲其核.而其惟一之特性，爲I在此爲無限.此由有限節變爲無限節之變動，在積分方程式之全體理論中發生一本質上之分別，* 考核(11)之特性數卽可知分別之所在.倘此節爲有限，則從以前所論，可知其有無限個特性數† 而每一個特性數有一有限指標，但今則(至少須限制此特性函數之觀念，使此特性函數爲「能令Fourier氏積分定理(8)式成立之函數」)只有兩特性數，卽±1而此每一特性數之指標反爲無限.欲證此理，可就第二種齊次積分方程式

$$u(x)=\lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\cos(x\xi)u(\xi)\,d\xi \tag{12}$$

考之.若λ爲一特性數，$u(x)$爲其相應之特性函數，則不但此方程式(12)可以滿足，並可以$u(x)/\lambda$爲(9)及(10)中之$f(x)$，而得

$$u(x)=\frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty\cos(x\xi)u(\xi)\,d\xi \tag{13}$$

---

* 引入新變數

$$x'=\frac{x}{1+x},\qquad \xi'=\frac{\xi}{1+\xi},$$

則(9)之原爲無限節及有限核者，變爲有有限節及無限核之方程式.

† 此假定一易於證實之事實，卽$\cos(x\xi)$不能以有限個項(各爲x之函數及ξ之函數之積者)之和表之.

[注意以 $u(x)/\lambda$ 爲 $f(x)$, 則 (9) 爲 (12); (10) 爲 (13); 合之卽同於以 (8) 之 $f(x)$ 爲 $u(x)/\lambda$]

以 (12) 及 (13) 相合, 得

$$u(x)\equiv\lambda^2 u(x),$$

因 $u(x)$ 不恆等於零, 故只能有 $\lambda=\pm 1$ 之兩特性數.

欲證明此 ± 1 確爲特性數及其指標爲無限, 只須注意 c 爲任意正數時, 兩函數

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-cx}\pm\frac{c}{x^2+c^2}$$

依次爲 $\lambda=+1$ 及 $\lambda=-1$ 時之 (12) 之兩解.

核 (11) 但爲「一類有相似性質之核」中之一個, 此一類核頗爲重要, 其理論可參考 H. Weyl 氏之論文 "Singuläre Integralgleichungen mit besonderer Berücksichtigung des Fourierschen Integraltheorems", Göttingen, 1908.

附錄 譯名及原名對照表

一 畫

一二兩階導式 first and second derivative
一次結合 linear conbination
一次獨立 linearly independent
一組合法函數 a set of normalized functions
一階導式 first derivative
一階諸偏導式 first partial derivatives

二 畫

$(n+1)$ 層積分 $(n+1)$-fold integral
二重積分 double integral
二重點 double point
力學問題 mechanical problem

三 畫

I 中有連續解 solution continuous throughout I.
子式 minor
上限 upper limit
下指標 subscript
m 階之根 root of mth order

四 畫

公元素 general element
不可積 non-integrable
互垂函數 orthogonal function
元素 element
不連續點 discontinuity
公項 general term
不等式 inequality
互謂之逆 said to be reciprocal
勻斂 uniformly convergent

五 畫

右上角 upper right-hand
左下角 lower left-hand
平方 square
平行六面體 parallelopiped
正有定二次式 positive definite quadratic form
他枝解析 other branches of analysis
主值 principal value
可移去之不連續點 removable discontinuities
四項式 four-term expression
正項級數 series of positive constant term
主解 principal solution
主對角線 principal diagonal
母線 generator
可積 integrability

六 畫

行 column
列 row
行列式 determinate
次序 order
合法 normalized
有限 finite
有限躍 finite jump
多重積分 muliple integral
充要條件 necessary and sufficient condition
共軛虛數 conjugate imaginary root
有窮極 finite pole
自變數 independent variable, argument

七 畫

均勻收斂 uniformly convergent
形式 type
尾部 remainder
角點 vertex

八 畫

直交坐標 rectangular coordinate
非齊次方程式 non-homogeneous equation
兩層積分 iterated integral
定積分 definite integral
定積分記號 sign of definite integral
昇冪級數 power series
附屬行列式 adjoint
兩變數函數 function of two variables

九 畫

柱面 cylinder
重率常數 gravitational constant
指標 index, subscript
重數 multiplicity
重點 double point

十 畫

核 kernel
逐次微係數 successive derivative
矩形 rectangle
修改行列式 modified determinate
修改附屬行列式 modified adjoint
特別解 particular solution
特性 general character
特性函數 characteristic function
特性函數之完全互垂組 complet orthogonal system of characteristic function
特性數 characteristic number
逆函數 reciprocal function
被積函數 integrand
起點 point of departure

十 一 畫

第一第二兩種線方程式 the linear equations of the first and second kinds
第一階之極 poles of first order
基本解組 foundamental system of solution
規則分佈 regularly distributed
閉區域 closed region
推廣公式 extended formula
偏微分方程式 partial differential equation
常數 constant

參數 parameter
異點 singularities
連續 continuous
連續界值 continuous boundary values
連續轉向之切線 continuously turning tangent

十二畫

極 pole
最小二乘法 method of least square
極限 limit
無限積分 infinite integral
超越方程式 transcendental equation
絕對可積 absolute integrability
絕對收斂 absolutely convergent
絕對值 absolute value
開節 open interval
單積分 simple integral

十三畫

解 solution
解析 analytic
微分方程式 differential equation
齊次 homogeneous
齊次方程式 homogeneous equation
逼近 approach
普遍定理 general theorem
隨意常數 arbitrary constant
微積方數式 differentio-integral equation

十四畫

輔助方程式 reduced equation
輔助條件 auxiliary condition
複素 complex
對稱核 symmetric kernels
實數 real number

十五畫

節 interval
線代數方程式 linear algebraic equation
線代數方程式系 system of linear algebraic equation
整解析函數 integral analytic function
數學歸納法 mathematical induction
質點 particle
質點之起點 point of departure

十六畫

橫 horizontal
積分之微分法 ruler for differentiating and integral
積分方程式 integral equation
導式 derivative
餘因數 cofactor
隣接兩項 successive term

十七畫

縱 vertical

十八畫

冪 power

二十三畫

變數 variable
邏輯上 logical

$$\sum \frac{32 \cdot 11y - 5 \cdots d}{21 \cdot 33y - 6 \cdot 10b}$$

$$\int \frac{322y - 5 \cdots b + 10y - (3150 + 10000)b}{10y}$$

$$\sum 30y + 25y \quad F(68.4y + 10 \cdots L)$$

$$25 \cdots b + (3 \cdot 8 + 10)y.$$

University of British Columbia Library

DUE DATE

ET–6

上海
寶傳新法帖社 壹元

ASIAN STUDIES
LIBRARY

UNIVERSITY OF B.C. LIBRARY
QA 431 C526 1930z
Chi fen fang ch_leng shih chih tao yin.
3 9424 03161 3752

THE UNIVERSITY OF
BRITISH COLUMBIA
LIBRARY